2021・11・10

§6 有理型函数

§6.1. 孤立特異点

Dfn. $s \in \mathbb{C}$ が函数 f の孤立特異点
$:\Longleftrightarrow$ $s \in {}^{\exists}U \subset \mathbb{C}$, 開. $U \setminus \{s\}$ 上 f は定義されている.
s では f は定義されてない

記号.
f: 函数. $\lim_{z \to w} 1/f(z) = 0$ の時 $\lim_{z \to w} f(z) = \infty$ と書く.

Dfn. $U \subset \mathbb{C}$: 開, $s \in U$, f: $U \setminus \{s\}$ 正則, s は f の孤立特異点
(1) $\lim_{z \to s} f(z)$ が $\mathbb{C}$ で存在する時. s を除去可能特異点という
(2) 〃 $= \infty$ の時. s を極という
(3) (1)と(2)以外の場合. s を真性特異点という.

Eg. 6.1.1. (1) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. $z=0$ は除去可能特異点
∵ $\lim_{z \to 0} f(z) = 1$ ← 連続拡張
(2) 有理函数 $f(z) = P(z)/Q(z) = P(z) / \prod_{l=1}^{N} (z - s_l)^{m_l}$
Q の根 s_l $(l=1, \dots N)$ は f の極
(3) $f(z) = \exp(1/z)$. $z=0$ は真性特異点
∵ $z \in \mathbb{R}_{>0}$ で $z \to 0$ とすると $\lim_{z \to +0} f(z) = \infty$
$z \in \mathbb{R}_{<0}$ で $z \to 0$ とすると $\lim_{z \to -0} f(z) = 0$ //

<u>Thm. 6.1.4.</u> $V \subset \mathbb{C}$: 開, $f : V \to \mathbb{C}$ 正則, 定数関数ではない.
$c \in V$. $f(c) = 0$
$\Rightarrow$ $c \in {}^{\exists}U \subset V$: 開.
$\exists!$ $g : U \to \mathbb{C}$, 正則, 零点を持たない.
$\exists!$ $n \in \mathbb{Z}_{>0}$
$$f(z) = (z - c)^n g(z) \quad {}^{\forall}z \in U$$
∵ 正則函数のTaylor展開 (Thm. 5.1.2) から. //

<u>Dfn.</u> この n を f の零点 c における<u>位数</u>という.

<u>Thm. 6.1.5.</u> $c \in \mathbb{C}$: 函数 f の極
$\Rightarrow$ $c \in {}^{\exists}U \subset \mathbb{C}$, 開.
$\exists!$ $h : U \to \mathbb{C}$, 正則, 零点を持たない
$\exists!$ $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ $\quad f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-c)^n} \quad {}^{\forall}z \in \mathbb{C}$
∵ $1/f(z)$ に定理 6.1.4. を適用 //

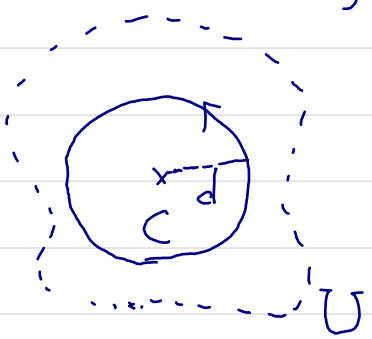
<u>Dfn.</u> この n を f の極 c における位数という

§6.2. Laurent 展開.

Prp. 6.2.2. $c \in \mathbb{C}$: 函数 f の n 位の極

$c \in {}^{\exists}U \subset \mathbb{C}$, 開 $\quad {}^{\exists!}G : U \to \mathbb{C}$: 正則

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + G(z)$$



$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=d} (w-c)^{k-1} f(w)\, dw$$

$(k=1,\ldots,n)$ $\quad$ ↑正向き. $\quad D(c,d) \subset U$ なる ${}^{\forall}d \in \mathbb{R}_{>0}$.

: f の極 c での Laurent 展開

Dfn. 6.2.3. 上の状況で $\frac{a_{-n}}{(z-c)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c}$ を f の極 c での主部.

$a_{-1} =: \operatorname{Res}_{z=c} f(z)$ $\quad$ 〃 $\quad$ 留数という.

Cor. $$\operatorname{Res}_{z=c} f(z) = \lim_{z\to c} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-c)^n f(z)\right)$$

(∵) $$(z-c)^n f(z) = a_{-n} + \cdots + (z-c)^{n-1} a_{-1} + (z-c)^n \times G(z)$$

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\quad 〃 \quad \right)\Big|_{z=c} = 0 + \cdots + 0 + (n-1)!\, a_{-1} + 0$$

$$\frac{d^k}{dz^k}\left(g(z)\cdot h(z)\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g^{(j)}(z)\cdot h^{(k-j)}(z)$$

$$\therefore \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-c)^n G(z)\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \underbrace{\frac{d^j}{dz^j}(z-c)^n}_{\xrightarrow{z\to c}\ \text{定数} \times (z-c)^{n-j}} \times G^{(n-1-j)}(z)$$

$\to 0$

§6.3. 有理型函数

Dfn. 6.3.1. $U \subset \mathbb{C}$: 開

函数 f が U 上の有理型函数

$:\Longleftrightarrow$ $\exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$, U に集積点を持たない,

f は $U \setminus \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 上正則, z_n は f の極

E.g. 有理函数 $f(z) = P(z)/Q(z) = P(z) / \prod_{k=0}^{\ell-1} (z - z_{(k)})^{m_k}$

は $\mathbb{C}$ 上有理型

($z_n := z_{(n \bmod \ell)}$ とすれば $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ は集積点を持たない)

Dfn. (1) 函数 f が無限遠で正則 $:\Longleftrightarrow$ $f(1/z)$ が $z=0$ で正則

〃 で極を持つ $:\Longleftrightarrow$ 〃 で極を持つ

(2) 〃 拡張された複素数平面 $\overline{\mathbb{C}}$ で有理型

$:\Longleftrightarrow$ f は $\mathbb{C}$ 上有理型かつ, 無限遠で正則又は極をもつ.

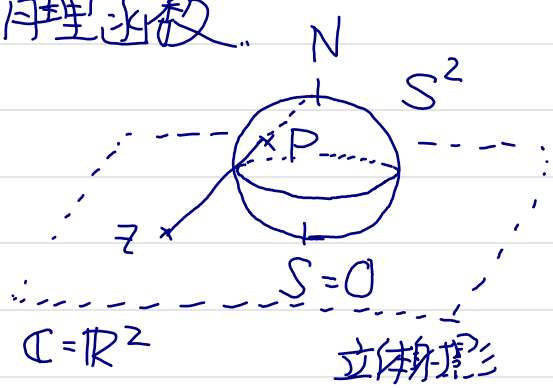
Thm. 6.3.2. $\overline{\mathbb{C}}$ 上有理型函数は有理函数.

Rmk. (問 6.3.)

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \overset{\text{同相}}{\cong} S^2$$

$$z \longmapsto P$$

$$\infty \longmapsto N$$



$\overline{\mathbb{C}}$ を Riemann 球面という