現代数学基礎 CⅢ　10 月 28 日分小テスト解答

ver. 2021.10.31

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. 原点中心で半径 2 の円周に正の向き付けをいれた閉曲線を C とする. 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z}{(z-1)^4}dz.$$

解答. 導関数の積分表示 (講義ノートの定理 3.3.2) から, $f(z) \coloneqq ze^z$ とすると

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^4}dz \;=\; \frac{2\pi i}{3!}f'''(1) \;=\; \frac{\pi i}{3}\cdot(3e^z + ze^z)\big|_{z=1} = \frac{4\pi e i}{3}.$$

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.7 点でした. 積分路 C (あるいはその変形) の内部には $z=1$ があって, 被積分関数 $\frac{ze^z}{(z-1)^4}$ は $z=1$ で定義されていないので, Cauchy の積分定理は使えません. また (講義ではまだ扱っていませんが) Laurent 展開を使って計算できますが, 項別積分可能性を議論していなければ 1 点減点しました.