2021・10・28

§4 Cauchyの積分定理2.

§4.1. ホモトピーと単連結領域

$h_s(t)$はγ_sのパラメータ付け.

Dfn. 4.1.1. $U \subset \mathbb{C}$: 開

γ_0, γ_1 : 始点と終点を共有する Uの曲線

γ_0とγ_1の<u>ホモトピー写像</u>

$h(s,t) : [0,1] \times [a,b] \to U$

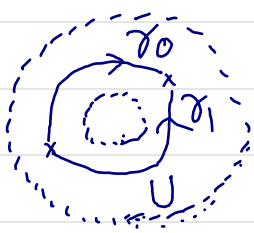
s.t. (i) $\forall s \in [0,1]$. $h_s(t) := h(s,t) : [a,b] \to U$ はUの曲線を定める

(ii) $h_0(t)$はγ_0の, $h_1(t)$はγ_1のパラメータ付け

(iii) $h_s(a)$はsによらない. (γ_0, γ_1の始点)

$h_s(b)$ 〃 (〃 終点)

hが存在する時 γ_0とγ_1は<u>ホモトピック</u>だという



ホモトピックでない例.

Thm. 4.1.2. $U \subset \mathbb{C}$: 開. $f : U \to \mathbb{C}$: 正則

$\gamma_0, \gamma_1 \subset U$: 曲線. ホモトピック

$\Rightarrow \int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$

Dfn. 4.1.3. 領域 $U \subset \mathbb{C}$ が<u>単連結</u> $:\Leftrightarrow$

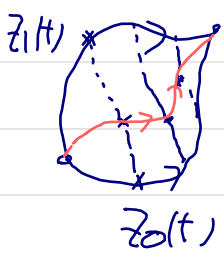
始点と終点を共有するUの任意の二曲線がホモトピック.

(∵問4.1.1)

Lem. 4.1.4. 開凸集合 (特に開円板)は単連結領域

∵ $z_0(t), z_1(t)$: γ_0とγ_1のパラメータ付け

$h(s,t) := (1-s)z_0(t) + s z_1(t)$



§4.2. 単連結領域とCauchyの積分定理

Thm 4.2.1 単連結領域Ω上の正則函数fは原始函数を持つ

∵ $z, s \in \Omega$, $\gamma \subset \Omega$: s始点, z終点の曲線

$$F(z) := \int_\gamma f(w)\,dw$$

Thm. 4.1.2. よりγの取り方によらないので well-defined.

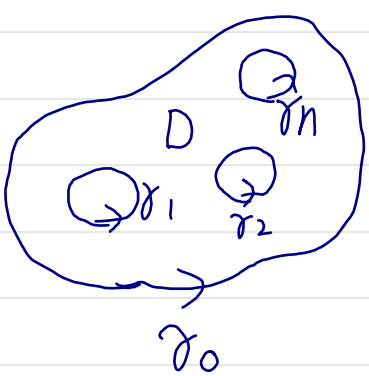
実はFがfの原始函数 //

これとCor. 2.2.5から

Cor. 4.2.2. $\Omega \subset \mathbb{C}$: 単連結領域, $\gamma \subset \Omega$: 閉曲線, $f: \Omega \to \mathbb{C}$: 正則

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Thm. 4.2.3 (Cauchyの積分定理 一般形)



$\gamma_0, \dots, \gamma_n$: 互いに交わらない単純閉曲線

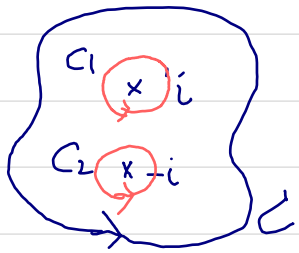
- γ_0の内部に$\gamma_1, \dots, \gamma_n$が含まれ, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$は互いに外部にある.
- D: $\gamma_0, \dots, \gamma_n$で囲まれる領域
- γ_0の向きは, Dが左側. $\gamma_1, \dots, \gamma_n$の向きは, Dが右側.

f: $\overline{D}$上の正則函数 $\quad (\overline{D} := D \cup \bigcup_{k=0}^{n} \gamma_k)$

この時

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz$$

Eg. (問.4.2.1)



$$\int_C \frac{dz}{z^2+1} = ?$$

$$\frac{1}{z^2+1} = \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)\cdot\frac{1}{2i}$$

$$\int_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left[\int_C \frac{dz}{z-i} - \int \frac{dz}{z+i}\right]$$

C: $\pm i$ が内部にある単純閉曲線.

C_1 : i 中心, 正向きの円

C_2 : $-i$ 〃

$$\int_C \frac{dz}{z-i} = \int_{C_1} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i$$

$$\int_C \frac{dz}{z+i} = \int_{C_2} \frac{dz}{z+i} = 2\pi i$$

$$\therefore \int_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left[2\pi i - 2\pi i\right] = 0$$

§4.3. 複素対数

<u>Thm.4.3.1.</u> $\Omega \subset \mathbb{C}$: 単連結領域, $1 \in \Omega$, $0 \notin \Omega$

$\forall z \in \Omega$ に対し, C を始点1, 終点 z の Ω 上の曲線 として

$$\mathrm{Log}_\Omega z := \int_C \frac{1}{w}\,dw$$

と定めて

(0) $\mathrm{Log}_\Omega z$ は well-defined

(1) 〃 Ω 上正則

(2) $\exp(\mathrm{Log}\, z) = z$

(3) $r \in \mathbb{R}_{>0} \cap \Omega$ なら $\mathrm{Log}_\Omega r = \log r$ ← 実対数関数

∵ (0) Ωは連結だから，Cは存在する．
Ωは単連結だから，積分はCの取り方によらない（Thm. 4.1.2）

(1) Thm. 4.2.1. と同じ議論により $(\mathrm{Log}_\Omega z)' = \frac{1}{z}$ で正則．

(2) $f(z) := z \times \exp(-\mathrm{Log}_\Omega z)$, $f'(z) = \exp(-\mathrm{Log}_\Omega z) - z \times \frac{1}{z} \times \exp(-\mathrm{Log}_\Omega z) = 0$
と Cor. 2.2.4（微分が0である正則函数は、連結成分上定数）
より $f(z) = f(1) = \exp(-\mathrm{Log}_\Omega 1) = \exp(-0) = 1$

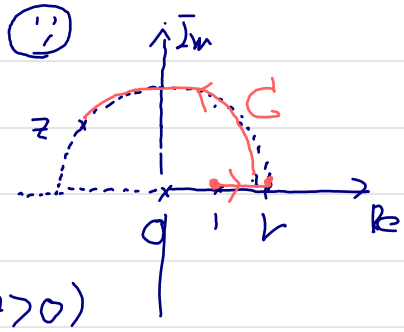
(3) $\mathrm{Log}_\Omega r = \int_I \frac{dw}{w} = \int_1^r \frac{dx}{x} = \log r$

↑ Cauchyの積分定理

<u>Lem. 4.3.2.</u> $\Omega = D := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ の場合．
↑ Dfn. 1.5.2

$\mathrm{Log}_D z = \mathrm{Log}\, z := \log r + i\theta$
対数の主値　　$z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$

∵



$(\theta > 0)$

Cを左図のように取ると

$$\mathrm{Log}_\Omega z = \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_{\Gamma_z} \frac{dw}{w}$$

$$= \log r + \int_0^\theta \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt$$

$w = re^{it}$

$$= \log r + i\theta$$