現代数学基礎 CⅢ　10 月 21 日分小テスト解答

ver. 2021.10.26

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. $R \in \mathbb{R}_{>0}$, i を虚数単位とし, 積分路 C_R を $-Ri$ から Ri へ向かう線分とする. 次の極限を求めよ.

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{z+1} dz.$$

解答. 対数の主値 Log を用いると

$$\int_{C_R} \frac{1}{z+1} dz \;=\; \big[\mathrm{Log}(z+1)\big]_{-Ri}^{Ri} \;=\; \mathrm{Log}(1+Ri) - \mathrm{Log}(1-Ri).$$

極座標表示すると $1 \pm Ri = \sqrt{R^2+1}\exp(\pm i\theta)$. 但し偏角 θ は $-\pi < \theta \leq \pi$ かつ $\tan\theta = R$ を満たすもの. よって実関数の対数関数 log を用いて

$$\int_{C_R} \frac{1}{z+1}\, dz \;=\; \big(\log\sqrt{R^2+1} + \theta i\big) - \big(\log\sqrt{R^2+1} - \theta i\big) \;=\; 2\theta i.$$

θ の特徴付けから $R \to \infty$ で $\theta \to \pi/2$ となるので, 求める極限は

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{z+1} dz \;=\; \lim_{R\to\infty} 2\theta i \;=\; \pi i.$$

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 2.6 点でした.

適切な原始函数を明記しているか, 少し怪しい議論でも答えが合っていれば 1 点はあげました.