現代数学基礎 CⅢ　10 月 14 日分小テスト解答

ver. 2021.10.14

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. 開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数 f について, 虚部 $\operatorname{Im} f$ が定数ならば f 自身も定数であることを示せ.

解答. $z = x + iy$, $f = u + iv$ と実部と虚部に分け, $u_x \coloneqq \partial_x u$ 等と略記すると, 虚部 v が定数であるという仮定から $v_x = v_y = 0$. Cauchy-Riemann 方程式は $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ だから $u_x = u_y = 0$. よって実部 u は U の連結成分上で定数であり, f も定数.

コメント. 3 点満点で採点しました. 議論に曖昧なところがあった場合は 1 点減点しました. 平均点は 2.9 点でした. この問題は講義ノートの問題 1.3.3 の類題です. 問題文に少し誤りがあって, U は領域と仮定するべきでした.