現代数学基礎 CⅢ　10 月 07 日分小テスト解答

ver. 2021.10.13

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

問題. 複素関数 $f(z) = z\overline{z}$ が正則か否か論じよ.

解答 1. Cauchy-Riemann 方程式の別形 (講義ノートの命題 1.3.2) を調べると

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} = z.$$

よって $z = 0$ では正則, $z \neq 0$ では正則ではない.

解答 2. 実部と虚部への分解 $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ は $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ より

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0$$

となるので, Cauchy-Riemann 方程式は

$$\partial_x u - \partial_y v = 2x, \quad \partial_y u + \partial_x v = 2y$$

がそれぞれ 0 になるという条件式である. 従って $(x, y) = (0, 0)$, つまり $z = 0$ では正則であり, $z \neq 0$ では正則でない.

コメント. 3 点満点で採点しました. 少し誤りがあれば 1 点減点しました (計算は合っているが, 全ての点で微分不可能などの記述). 平均点は 2.8 点でした.