2021 年度 数学演習 IX/X　講義ノート

担当： 柳田 伸太郎

ver. 2021.08.06

目次

0 はじめに

0.1 この講義ノートについて

これは 2021 年度の数学演習 IX・X (柳田担当分) の講義ノートです．英語のテキスト

R. P. Stanley, *Algebraic Combinatorics*, 2nd ed., Undergraduate Texts in Math., Springer, 2018

を講読していきます．このノートでは [S] と引用します．

注意． 定理番号はテキストの番号に合わせています (例えば定理 1.1 は [S, 1.1 Theorem])．一方で数式番号は合わせていません (例えば (1.2.1) は [S, (1.1)])．

注意． 筆者である Stanley 先生のウェブページの

`http://www-math.mit.edu/~rstan/algcomb/index.html`

にテキスト [S] の訂正があります．

0.2 テキストの大まかな内容

テキストのタイトル Algebraic Combinatorics を翻訳すると

代数的組み合わせ論

となります．文字通り, 組み合わせ論のうち代数的な話題を扱う分野を指す言葉です．以下でテキストの章の並び順に内容を大まかに紹介します．

- 第 1 章では**グラフ**の数学的な定式化から始めて, 隣接行列と固有値を中心に, グラフに関する基礎概念を導入します．第 2 章はその例として立方体グラフの固有値を求めます．第 3 章は隣接行列を少し変形した確率行列を導入して, 到達時刻の明示式を証明します．ここまでは平易な内容です．
- 第 4 章から抽象的な概念が入ってきます．まず **Boole 代数**というグラフに**次数付き半順序集合**の構造が入り, 更にそれが **Sperner 性**という性質を満たすことを証明します．第 5 章では, この Boole 代数 B に**群** G **が作用する**場合に, 商集合 B/G に G の次数付き半順序集合の構造と Sperner 性が遺伝する (**Sperner の定理** 5.8) ことが示されます．この第 5 章はかなり難しい部分ですが, この本の前半のハイライトでもあるので, 是非とも理解して欲しい部分です．
- 第 6 章は少し具体的になって, **Young 図形**及びそれらのグラフである **Young 束**を導入し, それに沿ってこれまでに導入された概念の具体例が展開されます．また第 7 章も具体例で, 対称性を持つ色の付け方の数え上げに関する **Pólya の定理** 7.7 の証明が主目標です．

0.3 全般的な記号

この講義ノートの全編で用いる記号を説明する．テキスト [S] の xv,xvi ページも参照すること．

(1) 集合に関する記号．

(a) 集合 S が集合 T の部分集合であることを $S \subseteq T$ または $S \subset T$ で表す．真の部分集合であ

ることを $S \subsetneq T$ で表す.

(b) $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ で非負整数全体の集合を表す.

(c) 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$, 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と書く.

(d) $\mathbb{R}_{>0}$ は正の実数のなす集合を, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ は非負実数のなす集合を表す. 同様に $\mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{Q}_{\leq 0}$ 等の記号も用いる.

(e) 集合 S の濃度を $|S|$ で表す. S が有限集合の場合は $\#S := |S|$ と書くこともある.

(f) 集合 S の元 $u, v \in S$ に対し, Kronecker デルタ $\delta_{u,v}$ を次で定める.

$$\delta_{u,v} := \begin{cases} 1 & (u = v) \\ 0 & (u \neq v) \end{cases}. \tag{0.3.1}$$

(g) 集合 S 上の恒等写像を $\mathrm{id}_S \colon S \to S$ で表す.

(2) 諸函数の記号.

(a) 複素数 $x \in \mathbb{C}$ と非負整数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 二項係数 $\binom{x}{n}$ を

$$\binom{x}{n} := \frac{1}{n!} \overbrace{x(x-1)\cdots\bigl(x-(n-1)\bigr)}^{n \text{ 項}}$$

で定める. また $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ に対しては $\binom{x}{n} := 0$ と定める.

(3) 行列と線形空間に関する記号.

(a) R を $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のうちのどれかとする. $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\mathrm{Mat}(m, n, R)$ で R に成分を持つサイズ $m \times n$ の行列全体のなす集合を表す. また $\mathrm{Mat}(n, R) := \mathrm{Mat}(n, n, R)$ で n 次正方行列全体のなす集合を表す. また O で (適当なサイズの) 零行列を表す.

(b) $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $I_n := \mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1)$ で n 次単位行列を表す. 単に I と書くこともある.

(c) 行列 A に対して ${}^t A$ でその転置行列を表す.

(d) 正方行列 A に対して $\mathrm{tr}(A)$ でそのトレースを, $\det(A) = |A|$ でその行列式を表す.

1 グラフ上の歩行 (4/23)

今回の内容は参考書 [S, Chapter 1] に基づく.

1.1 有限グラフに関する基本概念・用語

集合 S と非負整数 k に対し, S の部分集合であって元が k 個のもの全体からなる集合を $\binom{S}{k}$ と書く. つまり

$$\binom{S}{k} := \{T \subset S \mid |T| = k\}.$$

例えば $S = \{1,2,3\}$, $k = 2$ なら

$$\binom{S}{2} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\} = \{12,13,23\}. \tag{1.1.1}$$

ここで $12 := \{1,2\}$ 等と略記した.

集合 S 上の**マルチセット**[1]とは, S の元からなる列たちを, 順番が違うものは同一視して得られるもののことをいう. 例えば $S = \{1,2,3\}$ なら, 列 $(1,1,2)$ と $(2,1,1)$ は S 上の同一のマルチセットを定める. これを $[1,1,2]$ と書こう. 更に簡略化して, 元の重複度が問題になることを考慮して,

$$[1^2,2] = [1,1,2] = [2,1,1], \quad [1^4,2,3^3,4^2] = [1,1,1,1,2,3,3,3,4,4]$$

のように書くことにする. 集合 S と非負整数 k に対し, S 上のマルチセットであって長さ k のもの全体からなる集合を $\left(\!\binom{S}{k}\!\right)$ と書く. つまり例えば $S = \{1,2,3\}$, $k = 2$ なら

$$\left(\!\!\binom{S}{2}\!\!\right) = \{[1,1],[1,2],[1,3],[2,2],[2,3],[3,3]\} = \{11,12,13,22,23,33\}.$$

ここでも (1.1.1) と同様の略記をした.

発表用問題 1.1 (解答は 1.1). S を有限集合とし, その濃度を $n := |S|$ と書く. また k を非負整数とする. 集合 $\binom{S}{k}$ と $\left(\!\binom{S}{k}\!\right)$ の濃度 $|\binom{S}{k}|$ と $|\left(\!\binom{S}{k}\!\right)|$ を n と k を使って表せ.

グラフとは「頂点と辺からなるもの」だが, マルチセットを使うと数学的に定義できる:

定義. グラフ G とは, 集合 V と E および写像 $\varphi : E \to \left(\!\binom{V}{2}\!\right)$ からなる三つ組み $G = (V,E,\varphi)$ のことをいう. V と E をそれぞれ G の**頂点集合**および**辺集合**と呼ぶ. また V の元を G の**頂点** (vertex), E の元を G の**辺** (edge) と呼ぶ.

E と V がともに有限集合であるグラフ G を**有限グラフ** (finite graph) と呼ぶ.

有限グラフ $G = (V,E,\varphi)$ の辺 $e \in E$ に対して, $\varphi(e) = \{u,v\}$, $u,v \in V$ と書ける. これを (1.1.1) と同様に $\varphi(e) = uv$ と書くこともある. この時, u と v を e の**端点**と呼び, また e は u,v に**接続する** (incident) といい, 更に頂点 u と v は**隣接する** (adjacent) という.

---

1) multiset の訳語は標準的なものがないようなので, カタカナで書きます.

同じ記号のもと, 辺 e の端点が等しい時, つまり $\varphi(e) = vv$ と書ける時, e を (v を端点とする) **ループ** (loop) と呼ぶ[2)]. また辺 $e_1, e_2, \ldots, e_j$, $j > 1$ があって $\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \cdots = \varphi(e_j) = uv$ となっている時, 頂点 u と v の間に**重複辺** (multiple edge) があるという. ループも重複辺もない有限グラフは**単純** (simple) であるという.

発表用問題 1.2 ([S] の p.1, 下から 3 行目. 解答は 1.2). 単純な有限グラフ $G = (V, E, \varphi)$ について, 辺集合 E は $\binom{V}{2}$ の部分集合とみなせることを説明せよ.

1.2 グラフの隣接行列と歩行

以下, 有限グラフのことを単にグラフと呼ぶ. また G と書いたらグラフ $G = (V, E, \varphi)$ のことを指すものとし, $p := |V|$ を頂点の数とする.

定義. グラフ G の頂点集合 V に番号付け $\{1, 2, \ldots, p\}$ を一つ指定し, p 次正方行列 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(G)$ を

$$\boldsymbol{A} = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{p}, \quad a_{i,j} := |\{\varphi \in E \mid \varphi(e) = ij\}|$$

で定める. つまり (i, j) 成分 $a_{i,j}$ を頂点 i と j に接続する辺の数で定める. この正方行列 $\boldsymbol{A}$ を G の**隣接行列** (adjacency matrix) と呼ぶ.

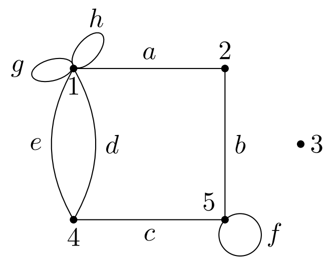
定義から, 有限グラフ G の隣接行列 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(G)$ は実対称行列で, $\operatorname{tr} \boldsymbol{A}$ は G のループの数である.

以上で導入した概念を例を使って説明し直そう.

例. 図 1.2.1 は有限グラフ $G_0 = (V_0, E_0, \varphi_0)$ を表している. 但し

$$V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E_0 = \{a, b, c, d, e, f, g\},$$
$$\varphi_0(a) = 12,\ \varphi_0(b) = 25,\ \varphi_0(c) = 45,\ \varphi_0(e) = \varphi_0(f) = 14,\ \varphi_0(f) = 55,\ \varphi_0(g) = \varphi_0(h) = 11.$$

辺 f, g, h がループで, **重複辺** (multiple edge) は e, d と g, h である. この頂点集合の番号付けから定まる隣接行列は図中のようになって, 確かに実対称行列である. また対角成分は対応する頂点に接続するループの数で, 特に $\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = 3$ はループの総数である.



$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

図 1.2.1 有限グラフ G_0

さて, この節のタイトルであるグラフ上の歩行を導入しよう.

定義. グラフ G 上の長さ ℓ の**歩行**[3)] (walk) とは, 頂点 $v_j \in V$ ($j = 1, 2, \ldots, \ell + 1$) と辺 $e_j \in E$ ($j = 1, 2, \ldots, \ell$) からなる列 $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_\ell, e_\ell, v_{\ell+1}$ であって, 任意の $1 \le i \le \ell$ に対して

2) edge loop と呼ぶこともあります.
3) 数学辞典 (第 4 判) の訳語に従いましたが, ウォークとカタカナで呼ぶこともあります.

$\varphi(e_i) = v_i v_{i+1}$ となっているもののことをいう．また，これを v_1 から $v_{\ell+1}$ への歩行と呼び，v_1 を始点，$v_{\ell+1}$ を終点と呼ぶ．

定理 1.1. グラフ G の頂点集合の番号付け $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ から定まる G の隣接行列を $\boldsymbol{A}$ と書く．この時，任意の正整数 ℓ に対し，$\boldsymbol{A}^\ell$ の (i,j) 成分は v_i から v_j への長さ ℓ の歩行の数と等しい．

証明　$\boldsymbol{A} = [a_{i,j}]$ と成分を書くと，$\boldsymbol{A}^\ell$ の成分は

$$\boldsymbol{A}_{i,j} = \sum a_{i,i_1} a_{i_1,i_2} \cdots a_{i_{\ell-1},j}$$

となる．但し和は列 $(i_1, \ldots, i_\ell - 1)$, $1 \leq i_k \leq p$ を全て走る．$a_{r,s}$ は頂点 v_r と v_s を端点とする辺の総数だから，和の各項 $a_{i,i_1} a_{i_1,i_2} \cdots a_{i_{\ell-1},j}$ は v_i から v_j への長さ ℓ の歩行であって $v_1, e_1, v_{i_1}, e_2, \ldots, v_{i_{\ell-1}}, e_\ell, v_j$ と書けるもの達の総数である．従って和をとったものは v_i から v_j への長さ ℓ の歩行の数である．□

隣接行列 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(G)$ は実対称行列だから直交行列で対角化できる．つまり ${}^tUU = I_p$ となる $U = [u_{r,s}] \in \mathrm{Mat}(p, \mathbb{R})$ があって

$$U^{-1}\boldsymbol{A}U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$$

となる．λ_i 達は $\boldsymbol{A}$ の固有値である．

定義. λ_i 達を**グラフ G の固有値** (eigenvalues) と呼ぶ．またそれに付随する $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを**グラフ G の固有ベクトル** (eigenvectors) と呼ぶ．

$i, j, k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ に対して $c_k := u_{i,k} u_{j,k}$ としよう．

系 1.2. 各 $\ell \in \mathbb{N}$ に対して，$\boldsymbol{A}^\ell$ の (i,j) 成分は次で与えられる．

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{i,j} = c_1 \lambda_1^\ell + \cdots + c_p \lambda_p^\ell. \tag{1.2.1}$$

発表用問題 1.3 (解答は 1.3)**.** 上記の (1.2.1) を示せ．

定理 1.1 より，v_i から v_j への長さ ℓ の歩行の数は (1.2.1) の右辺で与えられる．但し，これを計算するには対角化に用いた行列 U を計算しておく必要がある．一方で次の量は，U を求めなくても固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ さえ分かれば計算できるものである．

系 1.3. グラフ G の長さ ℓ の閉歩行 (closed walk)，つまり始点と終点が一致する長さ ℓ の歩行の数 $f_G(\ell)$ は次で与えられる．

$$f_G(\ell) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^\ell) = \lambda_1^p + \cdots + \lambda_p^\ell.$$

発表用問題 1.4 (解答は 1.4)**.** 系 1.3 を示せ．

例. 図 1.2.1 のグラフ G_0 を考える．

(1) 長さ $\ell = 1$ の閉歩行はループ f, g, h だけなので，その数は 3．一方で図 1.2.1 の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を使うと $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = 3$．

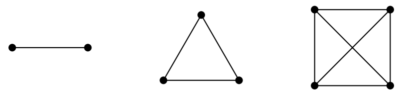
(2) 長さ $\ell = 2$ の閉歩行の数は $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2) = 9 + 2 + 0 + 5 + 3 = 19$ となるはず．グラフを使って数え上げてみよう．始点が 1 のものは $\{g, h\}$ の組み合わせと $\{e, d\}$ の組み合わせ及び aa の計

4+4+1=9 個. 始点が 2 のものは aa と bb の 2 個. 始点が 3 のものはなし. 始点が 4 のものは $\{e,d\}$ の組み合わせと cc の計 $4+1=5$ 個. 始点が 5 のものは bb, cc, dd の計 3 個. 従って, 確かに $9+2+0+5+3=19$ 個.

1.3　完全グラフ

次に特別な形のグラフを考えよう.

定義. 頂点集合 $V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$ の**完全グラフ** (complete graph) K_p とは, 任意の異なる二頂点に接続する辺が一つだけ存在するグラフのことである.



K_2　　K_3　　K_4

図 1.3.1　完全グラフ

完全グラフ K_p の隣接行列は, 全ての成分が 1 である p 次正方行列 J_p を用いて次のように書ける.

$$\boldsymbol{A}(K_p)=J_p-I_p \tag{1.3.1}$$

命題 ([S, 1.6 Corollary, (1.5)])**.** 完全グラフ K_p における, 始点 v_i と終点 v_j の長さ ℓ の歩行の数は

$$\left(\boldsymbol{A}(K_p)^\ell\right)_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{(p-1)^\ell+(-1)^\ell(p-1)}{p} & (i=j)\\[2ex] \dfrac{(p-1)^\ell-(-1)^\ell}{p} & (i\neq j)\end{cases}.$$

証明　$I:=I_p$, $J:=J_p$ と書くと, (1.3.1) より $\left(\boldsymbol{A}(K_p)^\ell\right)_{i,j}=\left((J-I)^\ell\right)_{i,j}$ なので, $(J-I)^\ell$ の (i,j) 成分を求めればよい. J と I は可換, つまり $JI=IJ$ だから, 二項定理が使えて

$$(J-I)^\ell=\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{\ell-k}\binom{\ell}{k}J^k=(-1)^\ell I+\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{\ell-k}p^{k-1}\binom{\ell}{k}J.$$

再び二項定理より $\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{\ell-k}\binom{\ell}{k}p^{k-1}=\frac{1}{p}\left((p-1)^\ell-(-1)^\ell\right)$ だから,

$$(J-I)^\ell=(-1)^\ell I+\frac{(p-1)^\ell-(-1)^\ell}{p}J.$$

右辺の (i,j) 成分を見て, 結論を得る. □

レポート問題

レポート問題 1 ([S, Exercises for Chapter 1, 12 (a)], 解答 1)**.** グラフ G の各頂点 v に対し, v に接続する辺の総数を v の次数 (degree) と呼ぶ. G の頂点の次数の最大値を Δ, 隣接行列 $\boldsymbol{A}(G)$ の最大固有値を λ_1 とすると $\lambda_1\leq\Delta$ となることを示せ.

2 立方体グラフと Radon 変換 (4/30)

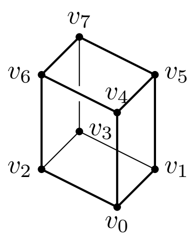
今回の内容は参考書 [S, Chapter 2] に基づく. 前回に引き続き, グラフといったら有限グラフのことを意味するものとする.

2.1 立方体グラフ

位数 2 の巡回群を $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ と書き, n 個の直積 $\mathbb{Z}_2^n$ の元を $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, $a_i \in \mathbb{Z}_2$ と書く. 各 a_i を a の成分と呼ぶ.

定義. 立方体グラフ (n-cube) C_n とは, 頂点集合が $\mathbb{Z}_2^n$ であり, 二元 $u, v \in \mathbb{Z}_2^n$ の成分が一つだけ違うときに限り u と v を接続する辺があるグラフのことをいう.

図 2.1.1 に $n = 3$ の時の立方体グラフ C_3 を図示する. 「立方体」の由来は明らかであろう.



$$\begin{array}{ll} v_0 = (0,0,0) & v_4 = (1,0,0) \\ v_1 = (0,0,1) & v_5 = (1,0,1) \\ v_2 = (0,1,0) & v_6 = (1,1,0) \\ v_3 = (0,1,1) & v_7 = (1,1,1) \end{array}$$

図 2.1.1 立方体グラフ C_3

発表用問題 2.1 (解答は 2.1)**.** 立方体グラフ C_n に関する次の主張を示せ: 頂点集合 $\mathbb{Z}_2^n$ を直積群とみなすと, $u, v \in \mathbb{Z}_2^n$ を接続する辺が存在するのは, $u + v$ の成分に $1 \in \mathbb{Z}_2$ が一つのみ存在するときである.

この節の目標は C_n の固有値と固有ベクトルを求めることである. 但し隣接行列を使うのではなく, 有限群 $\mathbb{Z}_2^n$ 上の函数空間を考えて求める.

2.2 有限群 $\mathbb{Z}_2^n$ 上の函数空間

定義. $\mathbb{Z}_2^n$ の実数値函数のなす集合を $\mathcal{V}$ と書く. つまり

$$\mathcal{V} := \{f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}\}.$$

発表用問題 2.2 (解答は 2.2)**.** $\mathcal{V}$ が次元 2^n の実線形空間であることを示せ.

$\mathcal{V}$ の二種類の基底 B_1, B_2 を導入しよう. B_1 の方が簡単である.

定義. 各 $u \in \mathbb{Z}_2^n$ に対し $f_u \in \mathcal{V}$ を, Kronecker デルタ (0.3.1) を用いて

$$f_u(v) := \delta_{u,v} \quad (v \in \mathbb{Z}_2^n)$$

と定め, $B_1 := \{f_u \mid u \in \mathbb{Z}_2^n\}$ とする.

発表用問題 2.3 (解答は 2.3)**.** 任意の $g \in \mathcal{V}$ が

$$g = \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} g(u) f_u \tag{2.2.1}$$

と書けることを示し, それを使って集合 B_1 が実線形空間 $\mathcal{V}$ の基底であることを示せ.

B_2 を導入するのに, $\mathbb{Z}_2^n$ 上の**ドット積** (dot product)

$$u \cdot v := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \quad (u, v \in \mathbb{Z}_2^n)$$

及び, 次で定まる $\mathcal{V}$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いる:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} f(u) g(u) \quad (f, g \in \mathcal{V}).$$

発表用問題 2.4 (解答は 2.4)**.** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が実線形空間 $\mathcal{V}$ 上の内積であることを示せ. またこの内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ について B_1 が直交基底であることを示せ.

定義. 各 $u \in \mathbb{Z}_2^n$ に対し $\chi_u \in \mathcal{V}$ を

$$\chi_u(v) := (-1)^{u \cdot v} \quad (v \in \mathbb{Z}_2^n)$$

と定め, $B_2 := \{\chi_u \mid u \in \mathbb{Z}_2^n\}$ とする.

補題 2.1. B_2 は実線形空間 $\mathcal{V}$ の基底である.

証明 $|B_2| = 2^n = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V}$ なので B_2 が線形独立であることを示せば十分. そのためには内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して B_2 の元が互いに直交することを示せば十分. 定義から $u, v \in \mathbb{Z}_2^n$ に対して

$$\langle \chi_u, \chi_v \rangle = \sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} \chi_u(w) \chi_v(w) = \sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u \cdot w} (-1)^{v \cdot w} = \sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{(u+v) \cdot w}.$$

ここで任意の $y \in \mathbb{Z}_2^n$ に対して

$$\sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{y \cdot w} = \begin{cases} 2^n & (y = \mathbf{0}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{2.2.2}$$

となることに注意する. 但し $\mathbf{0} := (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_2^n$. すると

$$\langle \chi_u, \chi_v \rangle \neq 0 \iff u + v = \mathbf{0} \overset{(*)}{\iff} u = v \tag{2.2.3}$$

となる. 但し $(*)$ では $u, v \in \mathbb{Z}_2^n$ であることを用いた. よって B_2 の元は互いに直交する. □

発表用問題 2.5 (解答は 2.5)**.** 等式 (2.2.2) を示せ.

後の議論のために, ここで基底 B_1 と B_2 の間の変換行列を用意しておく. B_1 から B_2 への変換行列を T と書こう. つまり, その成分 $T_{u,v}$ は $\chi_v = \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} f_u T_{u,v}$ を満たす. χ_v の定義より $\chi_v = \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u \cdot v} f_u$ なので,

$$T_{u,v} = (-1)^{u \cdot v} \quad (u, v \in \mathbb{Z}_2^n) \tag{2.2.4}$$

である．実は, 補題 2.1 の証明の議論を使うと, T の逆行列 T^{-1} が

$$(T^{-1})_{u,v} = \frac{1}{2^n}(-1)^{u\cdot v} \quad (u, v \in \mathbb{Z}_2^n) \tag{2.2.5}$$

で与えられることがわかる.

発表用問題 2.6. T とその転置行列 ${}^tT$ の積 ${}^tTT$ を (2.2.2) と (2.2.3) を使って計算することで, (2.2.5) を示せ.

2.3 Radon 変換と立方体グラフの固有値

前副節で扱った $\mathbb{Z}_2^n$ 上の函数空間 $\mathcal{V}$ について, Radon 変換と呼ばれる函数変換 ($\mathcal{V}$ から自分自身への線形写像) を導入する.

定義. 頂点集合の部分集合 $\Gamma \subset \mathbb{Z}_2^n$ と函数 $f \in \mathcal{V}$ に対し, 新しい函数 $\Phi_\Gamma f \in \mathcal{V}$ を

$$\Phi_\Gamma f(v) := \sum_{w\in\Gamma} f(v+w) \quad (v \in \mathbb{Z}_2^n)$$

で定義し, それを f の (**離散**ないし**有限**) **Radon 変換** (discrete or finite Radon transform) と呼ぶ. また対応 $f \mapsto \Phi_\Gamma f$ が定める線形写像 $\Phi_\Gamma\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ も Radon 変換と呼ぶ.

発表用問題 2.7. 対応 $f \mapsto \Phi_\Gamma f$ が線形写像 $\Phi_\Gamma\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ を定めることを示せ.

定理 2.2. 任意の $\Gamma \subset \mathbb{Z}_2^n$ と各 $u \in \mathbb{Z}_2^n$ に対して, 函数 $\chi_u \in B_2 \subset \mathcal{V}$ は Radon 変換 Φ_Γ の固有ベクトルであり, 対応する固有値 λ_u は

$$\lambda_u = \sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot w}.$$

証明 $v \in \mathbb{Z}_2^n$ に対して

$$\Phi_\Gamma\chi_u(v) = \sum_{w\in\Gamma}\chi_u(v+w) = \sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot(v+w)} = (-1)^{u\cdot v}\sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot w} = \chi_u(v)\sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot w}.$$

従って $\Phi_\Gamma\chi_u = \lambda_u\chi_u$, $\lambda_u = \sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot w}$ である. □

さて, §2.1 で宣言した通り, Radon 変換と立方体グラフ C_n を結びつけることで C_n の固有値を求めよう.

定義. 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\delta_i := (0, \ldots, 0, \overset{i\text{ 番目}}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_2^n$ とし, $\Delta := \{\delta_1, \ldots, \delta_n\} \subset \mathbb{Z}_2^n$ と定める. そして $\mathcal{V}$ の基底 $B_1 = \{f_u \mid u \in \mathbb{Z}_2^n\}$ に関する Radon 変換 $\Phi_\Delta\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ の表現行列を $[\Phi_\Delta]$ と書く. つまり, 行列 $[\Phi_\Delta]$ の (u, v) 成分を $(\Phi_\Delta)_{u,v}$ と書くと

$$\Phi_\Delta f_u = \sum_{v\in\mathbb{Z}_2^n}(\Phi_\Delta)_{u,v} f_v.$$

補題 2.3. 表現行列 $[\Phi_\Delta]$ は C_n の隣接行列 $\boldsymbol{A}(C_n)$ と等しい.

証明 $[\Phi_\Delta]$ を求めるには, 各 $u \in \mathbb{Z}_2^n$ に対して $f_u \in B_1 \subset \mathcal{V}$ の像 $\Phi_\Delta f_u$ を B_1 で展開すればよい. $v \in \mathbb{Z}_2^n$ に対し

$$\Phi_\Delta f_u(v) = \sum_{w\in\Delta} f_u(v+w) \overset{(\star)}{=} \sum_{w\in\Delta} f_{u+w}(v)$$

となる. 但し $(\star)$ は, $\mathbb{Z}_2^n$ において $u = v + w \iff u + w = v$ となることから従う. これは

$$\Phi_\Delta f = \sum_{w \in \Delta} f_{u+w}$$

を意味するから, 表現行列 $[\Phi_\Delta]$ の成分は

$$(\Phi_\Delta)_{u,v} = \begin{cases} 1 & (u + v \in \Delta) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となる. Δ の定義から, $u + v \in \Delta$ となるためには u と v の成分が一箇所だけ違うことが必要十分. 問題 2.1 よりこれは u と v を接続する辺が存在することと同値なので, 主張が得られる. □

系 2.4. 隣接行列 $\boldsymbol{A}(C_n)$ の固有ベクトル E_u は, 頂点集合 $\mathbb{Z}_2^n$ の線形結合で表すと

$$E_u = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u \cdot v} v$$

となり, 対応する固有値 λ_u は

$$\lambda_u = n - 2\omega(u) \tag{2.3.1}$$

となる. 但し $\omega(u)$ は $u \in \mathbb{Z}_2^n$ の成分 1 の数を表す. 特に, 各 $i = 0, 1, \ldots, n$ に対して, $\boldsymbol{A}(C_n)$ は固有値 $n - 2i$ を重複度 $\binom{n}{i}$ で持つ.

証明 (2.2.1) から任意の $g \in \mathcal{V}$ は $g = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} g(v) f_v$ と書ける. 特に $g = \chi_u$ とすると

$$\chi_u = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} \chi_u(v) f_v = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u \cdot v} f_v. \tag{2.3.2}$$

定理 2.2 より χ_u は Φ_Δ の固有ベクトルであり, また補題 2.3 より $B_1 = \{f_u \mid u \in \mathbb{Z}_2^n\}$ に関する表現行列 $[\Phi_\Delta]$ は $\boldsymbol{A}(C_n)$ と等しいので, (2.3.2) は $E_u = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u \cdot v} v$ が $\boldsymbol{A}(C_n)$ の固有ベクトルであることを示している. これで前半の主張が示せた.

後半について. 定理 2.2 より

$$\lambda_u = \sum_{w \in \Delta} (-1)^{u \cdot w} \tag{2.3.3}$$

が E_u の固有値である. ここで各 $\delta_i \in \Delta$ について, $u \in \mathbb{Z}_2^n$ の i 番目の成分 u_i と Kronecker デルタを使って $\delta_i \cdot u = \delta_{u_i,1}$ となることに注意しよう. すると (2.3.3) の和において $\omega(u)$ 個の項は -1, $n - \omega(u)$ 個の項は $+1$ となるので, $\lambda_u = -\omega(u) + (n - \omega(u)) = n - 2\omega(u)$ となる. □

以上で隣接行列 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(C_n)$ の固有値が分かったので, C_n 上の歩行の数え上げができる.

系 2.5. 頂点 $u, v \in \mathbb{Z}_2^n$ は $\omega(u + v) = k$ を満たすものとする (つまり一致しない成分が丁度 k 個). この時 u から v への長さ ℓ の歩行の数は

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{u,v} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} (n - 2i)^\ell \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j}. \tag{2.3.4}$$

特に始点と終点が u である長さ ℓ の閉歩行の数は

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{u,u} = 2^{-n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-2i)^\ell. \tag{2.3.5}$$

証明 補題 2.3 より $B_1 = \{f_u \mid u \in \mathbb{Z}_2^n\}$ に関する $\Phi_\Delta^\ell \colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ の表現行列の成分 $(\Phi_\Delta^\ell)_{u,v}$ を求めればよい. 問題 2.4 より B_2 の各元 $\chi_u = \sum_{v\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{u\cdot v}f_u$ が Φ_Δ の固有ベクトルで, 対応する固有値は系 2.4 より $\lambda_u = n - 2\omega(u)$. このことは, B_1 から B_2 への変換行列 T を用いると

$$(T[\Phi_\Delta]T^{-1})_{u,v} = \delta_{u,v}\lambda_u$$

となることを意味する. 従って, 対角成分が $D_{u,u} = \lambda_u$ である正方行列 D を用いると, 求めたいものは

$$(\Phi_\Delta^\ell)_{u,v} = (T^{-1}D^\ell T)_{u,v} = \sum_{w\in\mathbb{Z}_2^n}(T^{-1})_{u,w}\lambda_w^\ell T_{w,v}.$$

(2.2.4) と (2.2.5) から $T_{u,v} = (-1)^{u\cdot v}$ 及び $(T^{-1})_{u,v} = (-1)^{u\cdot v}/2^n$ となるので,

$$(\Phi_\Delta^\ell)_{u,v} = \sum_{w\in\mathbb{Z}_2^n}\frac{(-1)^{u\cdot w}}{2^n}\lambda_w^\ell(-1)^{w\cdot v} = \frac{1}{2^n}\sum_{w\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{(u+v)\cdot w}\bigl(n-2\omega(w)\bigr)^\ell.$$

ここで $w \in \mathbb{Z}_2^n$ のうち, $\omega(w) = i$ かつ $|\{a = 1, 2, \ldots, n \mid (u+v)_a = w_a = 1\}| = j$ となるものを考える. そのような w の個数を $N(i,j)$ と書こう. すると $(u+v)\cdot w \equiv j \pmod 2$ だから

$$(\Phi_\Delta^\ell)_{u,v} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}(n-2i)^\ell\sum_{j=0}^{n}(-1)^j N(i,j).$$

ここで仮定 $\omega(u+v) = k$ を思い出すと, j の最大値は k である. そして $N(i,j)$ は, w の成分 1 を i 箇所指定する方法であって, $u+v$ の成分 1 がある計 k 箇所から j 個, 残りの $n-k$ 箇所から $i-j$ 箇所を選ぶものの数だから, $N(i,j) = \binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}$. 従って

$$(\Phi_\Delta^\ell)_{u,v} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}(n-2i)^\ell\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}.$$

□

レポート問題

レポート問題 2 ([S, 2.6 Example], 解答 2)**.** 系 2.5 の式 (2.3.4) で $k = 1$ とすると

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{u,v} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\frac{(n-2i)^{\ell+1}}{n-i}$$

となることを示せ.

3　ランダムウォーク (5/07)

今回の内容は参考書 [S, Chapter 3] に基づく．グラフといったら, 頂点を二つ以上持つ有限グラフであって更に**連結** (connected), つまり任意の二頂点の間に歩行が存在するものとする．そのようなグラフの上をランダムに動く (ランダムウォーク) 状況を考えたい.

3.1　グラフに付随した確率行列

G を冒頭で説明した意味でのグラフとし, その頂点集合を $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ と書く．頂点 $u \in V$ の次数, つまり u を端点とする辺の数を d_u で表す．また二頂点 $u, v \in V$ に接続する辺の本数を $\mu_{u,v}$ で表す.

定義. G に付随した**確率行列** (probability matrix) $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(G)$ とは頂点集合 V で添え字づけられた正方行列であって, 成分が次で与えられるもののことである.

$$\boldsymbol{M}_{u,v} := \frac{\mu_{u,v}}{d_u} \quad (u, v \in V). \tag{3.1.1}$$

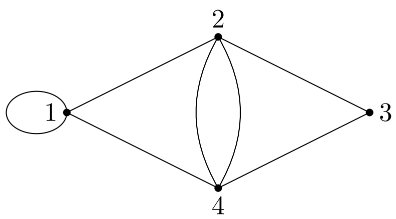
頂点 $u \in V$ に対して

$$0 \le \boldsymbol{M}_{u,v} \le 1 \quad (v \in V), \quad \sum_{v \in V} \boldsymbol{M}_{u,v} = 1 \tag{3.1.2}$$

となることに注意しよう．すると, $\boldsymbol{M}$ は G 上のランダムウォークの遷移確率を与えていることが分かる．つまり, ある時点で頂点 u にある状態が次の時点で頂点 v に遷移する確率を $\boldsymbol{M}_{u,v}$ とする, ということである．$\boldsymbol{M}_{u,v}$ の値の意味は, u を端点とする d_u 個の辺のうちの一つを一様な確率で選ぶことで遷移を定めている, ということである.

隣接行列の冪の意味 (定理 1.1) を思い出すと, $\ell \in \mathbb{N}$ に対して $(\boldsymbol{M}^\ell)_{u,v}$ は頂点 u から v へ ℓ ステップで到達する確率を表すことが分かる.

例. 図 3.1.1 にグラフ G_3 とその確率行列を書いた．(3.1.2) が成立していることに注意する.



$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

図 3.1.1　連結グラフ G_3 とその確率行列 M

議論を進める前に, 簡単なグラフについてそれに付随する確率行列を考えてみよう.

定義. グラフが**次数 d の正則グラフ** (regular graph of degree d) であるとは, 任意の頂点 $u \in V$ に対して $d_u = d$ である, つまり各頂点に d 個の辺が接続しているもののことをいう.

次数 d の正則グラフ G に対して, 隣接行列 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(G)$ と確率行列 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(G)$ は次の関係にある:

$$\boldsymbol{M} = \tfrac{1}{d}\boldsymbol{A}.$$

これは定義 (3.1.1) から明らかであろう. 特に両者の固有ベクトルは一致し, 固有値は次の関係にある:

$$\lambda_u(\boldsymbol{M}) = \tfrac{1}{d}\lambda_u(\boldsymbol{A}) \quad (u \in V). \tag{3.1.3}$$

例 3.1. §2.1 で導入した立方体グラフ C_n を思い出そう. その頂点集合は $\mathbb{Z}_2^n$ であった. C_n が次数 n の正則グラフであることが直ちに分かる. 系 2.4 の式 (2.3.1) で $\boldsymbol{A}(C_n)$ の固有値は計算していて, (3.1.3) と合わせて

$$\lambda_u(\boldsymbol{M}(C_n)) = \frac{1}{n}\bigl(n - 2\omega(u)\bigr) \quad (u \in \mathbb{Z}_2^n)$$

となる. ここで $\omega(u)$ は頂点 $u \in \mathbb{Z}_2^n$ の成分 1 の数を表す. また $\boldsymbol{A}(C_n)^\ell$ の対角成分の計算 (2.3.5) から

$$(\boldsymbol{M}(C_n)^\ell)_{u,u} = \frac{1}{2^n n^\ell}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-2i)^\ell. \tag{3.1.4}$$

発表用問題 3.1 (解答は 3.1)**.** 立方体グラフ C_n の頂点 $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ の成分の総和 $|u| := u_1 + \cdots + u_n$ に注目し, また $\boldsymbol{M}(C_n)^\ell$ の確率論的な意味を考えることで, ℓ が奇数ならば $(\boldsymbol{M}(C_n)^\ell)_{u,u} = 0$ となることを示せ.

式 (3.1.4) から直接 $(\boldsymbol{M}(C_n)^\ell)_{u,u} = 0$ を示すことはレポート問題 3 とする.

さて, 一般のグラフ G に対する確率行列 $\boldsymbol{M}$ の性質を一つ紹介しよう. $\boldsymbol{M}$ は隣接行列 $\boldsymbol{A}$ と違って対称行列ではないが, 固有値について次の性質を持つ.

定理 3.2. 頂点を二つ以上持つ連結有限グラフ G の確率行列 $\boldsymbol{M}$ は対角化可能であり, 固有値は全て実数である.

証明 各頂点 $v \in V$ に対して $d_v > 0$ であることに注意する. 頂点集合 V で添え字づけられている対角行列 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D}_{v,v} = \sqrt{d_v}$ を考えると

$$(\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}\boldsymbol{D}^{-1})_{u,v} = \sqrt{d_u}\frac{\mu_{u,v}}{d_u}\frac{1}{\sqrt{d_v}} = \frac{\mu_{u,v}}{\sqrt{d_u d_v}}.$$

従って $\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}\boldsymbol{D}^{-1}$ は対称行列であり, 対角化可能で実固有値のみを持つ. $\boldsymbol{D}$ は対角行列なので, $\boldsymbol{M}$ も対角化可能で実固有値のみを持つ. □

3.2 到達時刻

前副節と同様, グラフと言ったら頂点を二つ以上持つ連結有限グラフのことを意味する.

定義. グラフ G 上のランダムウォークを考える. G の二頂点 u, v に対し, u から出発して n ステップ後に初めて v に到達する確率を p_n とする. この時 u から v への到達時刻 (access time, hitting time) $H(u, v)$ を次で定義する.

$$H(u, v) := \sum_{n \geq 1} n p_n. \tag{3.2.1}$$

グラフ G に付随する確率行列 $\boldsymbol{M}$ で遷移確率が与えられるランダムウォークの場合, 到達時刻は次の定理 3.4 ように表せる.

G の頂点の数を $p := |V|$ と書く. また各頂点 $v \in V$ に対し, $\boldsymbol{M}$ から v 行と v 列を除いた行列を $\boldsymbol{M}[v]$ と書く. $\boldsymbol{M}[v]$ が $p-1$ 次正方行列であることに注意しよう. そして $T[v]$ を, $V \setminus \{v\}$ で添え字づけられる長さ $p-1$ の列ベクトルであって成分が

$$T[v]_u = \frac{\mu_{u,v}}{d_u} \quad (u \in V \setminus \{v\}) \tag{3.2.2}$$

で与えられるものとする. $\boldsymbol{M}$ の定義 (3.1.1) と比較すると, $T[v]$ は $\boldsymbol{M}$ の v 列目の列ベクトルから v 行目の成分を除いたものだと分かる.

定理 3.4. 行列 $I_{p-1} - \boldsymbol{M}[v]$ は可逆であり,

$$H(u, v) = \left((I_{p-1} - \boldsymbol{M}[v])^{-2} T[v] \right)_u. \tag{3.2.3}$$

例 3.5. 図 3.1.1 のグラフ G_3 について, $v = v_4$ として定理 3.4 に現れる行列を計算すると

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}[v_4] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3 - \boldsymbol{M}[v_4] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{4} & 1 & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

すると $\det(I_3 - \boldsymbol{M}[v_4]) = 1/2$ となって確かに $I_3 - \boldsymbol{M}[v_4]$ は可逆. 更に計算を進めると

$$(I_3 - \boldsymbol{M}[v_4])^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}, \quad (I_3 - \boldsymbol{M}[v_4])^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{55}{16} & \frac{13}{6} & \frac{17}{24} \\ \frac{13}{8} & \frac{7}{3} & \frac{11}{12} \\ \frac{17}{16} & \frac{11}{6} & \frac{13}{8} \end{bmatrix}, \quad T[v_4] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

となるので, 定理 3.4 から

$$\begin{bmatrix} H(v_1, v_4) \\ H(v_2, v_4) \\ H(v_3, v_4) \end{bmatrix} = (I_3 - \boldsymbol{M}[v_4])^{-2} T[v_4] = \begin{bmatrix} \frac{31}{12} \\ \frac{13}{6} \\ \frac{25}{12} \end{bmatrix}.$$

3.3　定理 3.4 の証明

では定理 3.4 の証明を始めよう．証明は三つのステップに分かれる．ステップ 1 と 2 で $I_{p-1} - \boldsymbol{M}[v]$ の可逆性を示し, ステップ 3 で (3.2.3) を示す.

定理 3.4 の証明, ステップ 1　$I_{p-1} - \boldsymbol{M}[v]$ の可逆性を証明する為に, より一般に, 対角化可能な (複素数値) r 次正方行列 B であって, その固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ が $|\lambda_j| < 1$ を満たす場合に, $I - B = I_r - B$ が可逆であることを示す．次のステップ 2 で $\boldsymbol{M}[v]$ がこの条件を満たすことを示す.

B を上記の条件を満たす r 次正方行列とする．$I - B$ が可逆であることを示すには,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B^n \tag{3.3.1}$$

が収束して $I - B$ の逆行列になることを示せばよい．条件より B は対角化可能だから, $UBU^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ となる可逆行列 U が存在し, 特に $n \in \mathbb{Z}$ に対して $B^n = U^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)^n U$ となる．従って, 各成分 $(B^n)_{i,j}$ について, n に依存しない $c_1, \dots, c_r$ が存在して

$$(B^n)_{i,j} = c_1 \lambda_1^n + \cdots + c_r \lambda_r^n. \tag{3.3.2}$$

これと $|\lambda_j| < 1$ から $\left(\sum_{n=0}^{\infty} B^n\right)_{i,j} = \frac{c_1}{1-\lambda_1} + \cdots + \frac{c_r}{1-\lambda_r}$ となって (3.3.1) が確かに収束することが分かる．また (3.3.2) と $|\lambda_j| < 1$ より $\lim_{m\to\infty} B^m = O$ となるので $(I-B)\sum_{n=0}^{m} B^n = I - B^{m+1} \xrightarrow{m\to\infty} I$. 従って (3.3.1) は $I - B$ の逆行列である. □

次に $\boldsymbol{M}[v]$ が対角化可能であり, かつ全ての固有値の絶対値が 1 未満であることを示そう．それが示せれば, ステップ 1 より定理 3.4 の前半, つまり $I_{p-1} - \boldsymbol{M}[v]$ の可逆性が得られる.

定理 3.4 の証明, ステップ 2　まず $\boldsymbol{M}[v]$ が対角化可能であることを示そう．G から頂点 v とそれに接続する辺を除いたグラフ $G - v$ を考える．$G - v$ は連結だとは限らないことに注意して, その連結成分を $H_1, \dots, H_m$ とする (図 3.3.1 参照). $G - v$ の連結成分 $H_1, \dots, H_m$ の順番に G の頂点を番号付ければ, $\boldsymbol{M}[v]$ は次の形のブロック対角行列になる:

$$\boldsymbol{M}[v] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_1 & O & \cdots & O \\ O & \boldsymbol{N}_2 & \cdots & O \\ & & \ddots & \\ O & O & \cdots & \boldsymbol{N}_m \end{bmatrix}. \tag{3.3.3}$$

各 $\boldsymbol{N}_r$ は, H_r が一点からなる場合は 0, 二点以上からなる場合は確率行列 $\boldsymbol{M}(H_r)$ である．定理 3.2 より後者は対角化可能だから, $\boldsymbol{M}[v]$ が対角化可能であることが分かった.

次に $\boldsymbol{M}[v]$ の固有値の絶対値が 1 未満であることを示そう．(3.3.3) より各 $\boldsymbol{N}_r$ の固有値を考えればよいが, H_r が一点からなる場合は $\boldsymbol{N}_r = 0$ で自明なので, H_r が二点以上からなる連結グラフである場合だけ考えればよい．その場合は $\boldsymbol{N}_r = \boldsymbol{M}(H_r)$ であった．この時 $\boldsymbol{N}_r$ は既約, つまり, 任意の

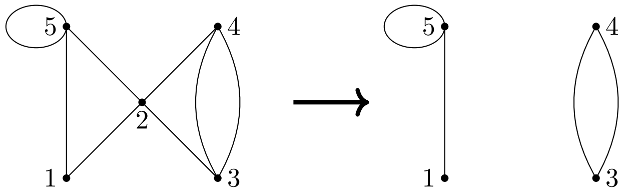


図 3.3.1　連結グラフから頂点 2 を除いたグラフの連結成分

置換行列 P に対して $P\boldsymbol{N}_r P^{-1}$ はブロック三角行列ではない (問題 3.2). すると次の事実を用いることができる.

事実 3.3 (Perron-Frobenius の定理)**.** B を非負実数成分の既約正方行列とし, ρ を B の固有値であって絶対値が最大であるものの一つとする. この時 ρ は正の実数であり, 重複度は 1 で, 更に ρ の固有ベクトルであって全ての成分が正の実数であるものが存在する.

この事実から, 確率行列 $\boldsymbol{N}_r = \boldsymbol{M}(H_r)$ の実固有値 $\rho_r > 0$ が存在して, $\boldsymbol{N}_r$ の全ての固有値 λ が $|\lambda| \leq \rho_r$ を満たす. また, $\boldsymbol{N}_r$ のサイズを $k \times k$ として, 行ベクトル $u = [u_1 \cdots u_k]$ であって全ての成分が $u_r > 0$ となり, かつ $uN = \rho_r u$ となるものとする (問題 3.3 参照). そして $v = {}^t[1 \cdots 1]$ を成分が全て 1 のサイズ k の列ベクトルとする. 行列の積 $u\boldsymbol{N}_r v$ を考えると, $u\boldsymbol{N}_r$ を先に計算すれば

$$u\boldsymbol{N}_r v = (\rho_r u)v = \rho_r(u_1 + \cdots + u_k). \tag{3.3.4}$$

一方 $\boldsymbol{N}_r v$ を先に計算すると, $\boldsymbol{N}_r$ の i 行目の和を σ_i と書けば

$$u\boldsymbol{N}_r v = u{}^t[\sigma_1 \cdots \sigma_k] = \sigma_1 u_1 + \cdots + \sigma_k u_k. \tag{3.3.5}$$

$\boldsymbol{N}_r$ は確率行列なので, (3.1.2) から $0 \leq \sigma_i \leq 1$ である. また $\sigma_h > 0$ となる $h = 1, \ldots, k$ が少なくとも一つ存在する (問題 3.4). このことと $u_i > 0$ 及び (3.3.5) から $u\boldsymbol{N}_r v < u_1 + \cdots + u_k$. (3.3.4) と比較して $\rho_r < 1$ が得られる.

以上で各 $r = 1, 2, \ldots, m$ について $\boldsymbol{N}_r$ の固有値の絶対値が 1 未満であることが示せた. 従って $\boldsymbol{M}$ についても同じ主張が成立する. □

発表用問題 3.2 (解答は 3.2)**.** 正方行列であって, 各列に成分 1 が一つだけあって他の成分は全て 0 であり, 各行にも成分 1 が一つだけあって他の成分は全て 0 であるものを**置換行列** (permutation matrix) という. 正方行列 B は, どの置換行列 P を使っても次の形のブロック三角行列に変形できない場合, **既約** (irreducible) であるという:

$$PBP^{-1} = \begin{bmatrix} C & D \\ O & E \end{bmatrix} \quad (C \text{ と } E \text{ のサイズは } 1 \text{ 以上}).$$

確率行列 $\boldsymbol{N}_r = \boldsymbol{M}(H_r)$ が既約であること示せ.

発表用問題 3.3 (解答は 3.3)**.** サイズ $k \times k$ の確率行列 $\boldsymbol{N}_r = \boldsymbol{M}(H_r)$ とその最大実固有値 $\rho_r > 0$ に対して, サイズ k の行ベクトル u であって全ての成分が正であり, かつ $u\boldsymbol{N}_r = \rho_r u$ となるものが存在することを, Perron-Frobenius の定理 (事実 3.3) から導け.

発表用問題 3.4 (解答は 3.4). 確率行列 $\boldsymbol{N}_r = \boldsymbol{M}(H_r)$ の i 行目の和を σ_i と書くと, $\sigma_h > 0$ となる $h = 1, \ldots, k$ が存在することを示せ.

最後に定理 3.4 の後半, つまり到達時刻 $H(u, v)$ の公式 (3.2.3) を導出しよう.

定理 3.4 の証明, ステップ 3 連結グラフ G 上のランダムウォークについて, 頂点 u から出発して頂点 v を一度も通らずに n ステップ後に頂点 w に到達する確率は $(\boldsymbol{M}[v]^n)_{u,w}$ で与えられる. w から 1 ステップで v に到達する確率は $\mu_{w,v}/d_w$ だから, 到達時刻の定義 (3.2.1) から

$$H(u, v) = \sum_{w \neq v} \sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{\mu_{w,v}}{d_w} (\boldsymbol{M}[v]^n)_{u,w} = \sum_{w \neq v} \frac{\mu_{w,v}}{d_w} \sum_{n \geq 0} (n+1)(\boldsymbol{M}[v]^n)_{u,w}. \tag{3.3.6}$$

ところでステップ 1 の (3.3.1) で, 全ての固有値の絶対値が 1 未満である可逆正方行列 B に対して $(I - B)^{-1} = \sum_{n \geq 0} B^n$ であることを示した. 同様に, 同じ条件を満たす B に対して

$$(I - B)^{-2} = \sum_{n \geq 0} (n+1) B^n \tag{3.3.7}$$

が示せる (問題 3.5). これと (3.3.6) 及び列ベクトル $T[v]$ の定義 (3.2.2) から

$$H(u, v) = \sum_{w \neq v} \frac{\mu_{w,v}}{d_w} (I_{p-1} - \boldsymbol{M}[v]^n)_{u,w} = \big((I_{p-1} - \boldsymbol{M}[v]^n) T[v]\big)_u$$

となり, 結論 (3.2.3) が得られた. □

発表用問題 3.5 (解答は 3.5). (3.3.7) を示せ.

レポート問題 (締切: 5/14 13:00)

レポート問題 3 (解答 3). 等式 (3.1.4) と問題 3.1 の結果から, $n, \ell \in \mathbb{N}$ かつ ℓ が奇数ならば

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n - 2i)^{\ell} = 0$$

となることが従う. 問題 3.1 の結果を使わずに, この等式を $\ell = 1, 3$ の場合に示せ.

4 Sperner 性 (5/14)

今回の内容は参考書 [S, Chapter 4] に基づく.

4.1 半順序集合

半順序 (partial order) の復習から始めよう.

定義 4.1. 半順序集合 (partially ordered set, poset) とは, 集合 P とその上の二項関係 $\leq$ で以下の公理を満たすものの組 $(P, \leq)$ のことである.

(P1)(反射則) 任意の $x \in P$ に対して $x \leq x$.

(P2)(反対称則) 任意の $x, y \in P$ に対し, $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$.

(P3)(推移則) 任意の $x, y, z \in P$ に対し, $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$.

半順序集合 $(P, \leq)$ の元 $x, y \in P$ に対し, $x \leq y$ かつ $x \neq y$ の時, $x < y$ と書く. また集合 P が有限集合の時, $(P, \leq)$ を有限半順序集合と呼ぶ.

半順序集合 $(P, \leq)$ のことを単に P と書くこともある. また半順序集合を英語のカタカナ読みで**ポセット**と呼ぶこともある.

例. 集合 S の部分集合全体のなす集合 2^S と包含関係 $\subseteq$ の組 $B_S := (2^S, \subseteq)$ は半順序集合である. B_S を S の **Boole 代数** (Boolean algebra) と呼ぶ [4]. 特に $n \in \mathbb{N}$, $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ の場合は B_n と書いて**階数 n の Boole 代数**と呼ぶ.

有限半順序集合は有限グラフで表すことができる.

定義. 半順序集合 $P = (P, \leq)$ の二元 $x, y \in P$ について, $x < y$ かつ $x < z < y$ となる $z \in P$ が存在しない時, y は x を**被覆する** (cover) と言い, $x \lessdot y$ と書く.

定義. 有限半順序集合 $P = (P, \leq)$ に対し, 頂点集合を集合 P とし, $x \lessdot y$ の時に x と y を接続する辺を一つ与えることでグラフができる. $x < y$ なら y を x より上に置いてこのグラフを描いたものを P の **Hasse 図** (Hasse diagram) と呼ぶ.

例. Boole 代数 B_3 の Hasse 図は図 4.1.1 のようになる. §1.1 と同様に, $\{1, 2, 3\}$ の部分集合を $1 := \{1\}$, $12 := \{1, 2\}$, $123 = \{1, 2, 3\}$ 等と略記している.

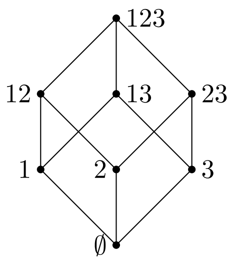


図 4.1.1 Boole 代数 B_3 の Hasse 図

4) Boole はブールと発音します. ここに書いた定義とは別に, 2^S と合併 $\cup$ 及び交叉 $\cap$ からなる組 $(2^S, \cup, \cap)$ のことを Boole 代数と呼ぶこともあります.

二つの半順序集合 P と Q が同型であるとは, 全単射 $\varphi\colon P \to Q$ であって, P において $x \leq y$ であることと Q において $\varphi(x) \leq \varphi(Q)$ であることが同値なものが存在することをいう. 有限半順序集合の同型類の個数が, 元の個数が 16 以下の場合に [S, p.32] に説明されている.

次に鎖による半順序集合の次数付けを導入する.

定義. $P = (P, \leq)$ を半順序集合とする.

(1) P の全順序部分集合 C のことを**鎖**ないし**チェイン** (chain) と呼ぶ. つまり, 鎖 C の任意の二元 $x, y \in C$ に対して $x \leq y$ または $y \leq x$ が成立する.

(2) P の鎖 C が有限集合ならば有限鎖と呼ぶ. 有限鎖 C の元の個数が $n+1$ の時に, C は**長さ** n であるという.

(3) P の鎖 C は, それを含む任意の鎖が C に一致する時, 極大だという. 有限半順序集合は, その任意の極大鎖が長さ n の時, **階数 n の次数付き半順序集合** (graded poset of rank n) と呼ばれる.

(4) P の鎖 $y_0 < y_1 < \cdots < y_j$ であって各 y_{i+1} が y_i を被覆しているもの, つまり $y_i \lessdot y_{i+1}$ となっているものを**飽和鎖** (saturated chain) と呼ぶ.

(5) 階数 n の次数付き半順序集合 P の元 $x \in P$ について, x を最大元とする飽和鎖のうち最長のものの長さが j の時, **x は階数 j である**といい, $\rho(x) = j$ と書く.

(6) 階数 n の次数付き半順序集合 P に対して, $P_j := \{x \in P \mid \rho(x) = j\}$ を P の j 番目の**レベル**と呼ぶ. また $p_j := |P_j|$ と書く. そして

$$F(P, q) := \sum_{i=0}^{n} p_i q^i = \sum_{x \in P} q^{\rho(x)}$$

を P の階数母函数 (**rank-generating function**) と呼ぶ[5].

発表用問題 4.1 (解答は 4.1)**.** 図 4.1.1 の Boole 代数 B_3 について, 以下が成立することを説明せよ.

(1) B_3 は階数 3 の次数付き半順序集合である.

(2) $P = B_3$ と書くと, そのレベルは $P_0 = \{\emptyset\}$, $P_1 = \{1, 2, 3\}$, $P_2 = \{12, 13, 23\}$, $P_3 = \{123\}$.

(3) $F(B_3, q) = (1 + q)^3$.

発表用問題 4.2 (解答は 4.2)**.** 階数 n の次数付き半順序集合 P は

$$P = P_0 \sqcup P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_n$$

とレベル P_j 達の非交和[6] (disjoint union) で書けることを示せ.

例. 階数 n の Boole 代数 B_n は階数 n の次数付き半順序集合である. 各 $x \in B_n$ に対して $\rho(x) = |x|$ (部分集合 $x \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ の元の個数) であり, 階数母函数は次のようになる.

$$(B_n)_j = \{x \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \mid |x| = j\}, \quad p_j := |(B_n)_j| = \binom{n}{j}, \quad F(B_n, q) = (1 + q)^n. \tag{4.1.1}$$

発表用問題 4.3 (解答は 4.3)**.** (4.1.1) を示せ.

5) 階数母函数という訳語はこの講義ノート特有のもので, 一般的に定着した訳語はなさそうです.

6) テキスト [S] での disjoint union の記号は $\uplus$ です.

4.2 Sperner 性

今回の主なテーマである Sperner 半順序集合を導入したい. その為にもう一つだけ新しい概念を紹介する.

定義. 半順序集合 $P = (P, \leq)$ の反鎖[7] (**anti-chain**) とは, 部分集合 $A \subsetneq P$ であってどの二元も $\leq$ で比較できない, つまり $x, y \in A$ かつ $x \neq y$ ならば $x < y$ でも $y < x$ でもないもののことをいう.

発表用問題 4.4 (解答は 4.4)**.** 次数付き半順序集合 P について, 各レベル P_j は反鎖であることを示せ.

定義 4.2. 階数 n の次数付き半順序集合 P は

$$\max\{|A| \mid A \subsetneq P \text{ は反鎖 }\} = \max\{|P_j| \mid j = 0, 1, \ldots, n\}$$

を満たす時, つまりレベル P_i の最大濃度を反鎖の濃度が超えない時, P が **Sperner 性** (Sperner property) を持つ, もしくは **Sperner 半順序集合** (Sperner poset) だと言う.

今回の目標は次の Sperner の定理 [Sp28] を証明することである.

系 4.8 (Sperner [Sp28] の定理)**.** Boole 代数 B_n は Sperner 性を持つ.

Sperner 性を持たない次数付き半順序集合も存在する. 例えば:

例 4.3. Hasse 図が図 4.2.1 で与えられる次数付き半順序集合は Sperner 性を持たない.

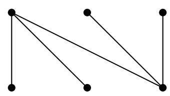


図 4.2.1　Sperner 性を持たない次数付き半順序集合の Hasse 図

発表用問題 4.5 (解答は 4.5)**.** 図 4.2.1 が Sperner 性を持たない次数付き半順序集合を与えていることを説明せよ.

次数付き半順序集合が Sperner 性を持つための, 組み合わせ論的な十分条件を一つ紹介しよう.

定義. P を次数付き半順序集合とし, 各レベルを P_j で表す. 単射 $\mu\colon P_j \to P_{j+1}$ であって任意の $x \in P_j$ に対して $x < \mu(x)$ となるもののことを P_j から P_{j+1} への順序許容写像[8] (**order-matching**) と呼ぶ. 同様に, 単射 $\mu\colon P_j \to P_{j-1}$ であって任意の $x \in P_j$ に対して $\mu(x) < x$ となるもののことを P_j から P_{j-1} への順序許容写像と呼ぶ.

順序許容写像 $\mu\colon P_j \to P_{j+1}$ が存在すれば次の不等式が成立することに注意しよう.

$$p_j \leq p_{j+1} \tag{4.2.1}$$

命題 4.4. P を階数 n の次数付き半順序集合とする. 整数 $0 \leq j \leq n$ と順序許容写像の列

$$P_0 \xrightarrow{\mu_0} P_1 \xrightarrow{\mu_1} \cdots \xrightarrow{\mu_{j-2}} P_{j-1} \xrightarrow{\mu_{j-1}} P_j \xleftarrow{\mu_{j+1}} P_{j+1} \xleftarrow{\mu_{j+2}} \cdots \xleftarrow{\mu_{n-1}} P_{n-1} \xleftarrow{\mu_n} P_n \tag{4.2.2}$$

7) この訳語もこの講義ノート特有のものです.
8) この訳語もこの講義ノート特有のものです.

が存在すれば, P は Sperner 性を持ち, 更に次の不等式が成立する.

$$p_0 \le p_1 \le \cdots \le p_{j-1} \le p_j \ge p_{j+1} \ge \cdots \ge p_{n-1} \ge p_n \tag{4.2.3}$$

証明 列 (4.2.2) の存在と (4.2.1) から (4.2.3) が従う. 以下で Sperner 性を示そう. 頂点集合を P とするグラフ G を次のように定義する: $x, y \in P$ に対して, 列 (4.2.2) に現れる順序許容写像 μ であって $\mu(x) = y$ となるものがあれば, x と y に接続する G の辺が一つあるものとする. 構成より G は P の Hasse 図の部分グラフである. また, G の連結成分はどれも P_j の元を一つだけ含むので, 連結成分の数は $p_j = |P_j|$ である. 任意の反鎖 A は各連結成分と高々一回しか交わらないので, $|A|$ は連結成分の数を超えない. つまり $|A| \le p_j$ である. 従って, 定義 4.2 より P は Sperner 性を持つ. □

例. Boole 代数 $P = B_3$ について, 次のような順序許容写像の列が存在し, それに対して上の命題のグラフ G を描くと図 4.2.2 のようになる.

$$P_0 \xrightarrow{\mu_0} P_1 \xrightarrow{\mu_1} P_2 \xleftarrow{\mu_3} P_3, \quad \mu_0(\emptyset) = 1, \quad \mu_1(1) = 12,\ \mu_1(2) = 23,\ \mu_1(3) = 13, \quad \mu_3(123) = 13.$$

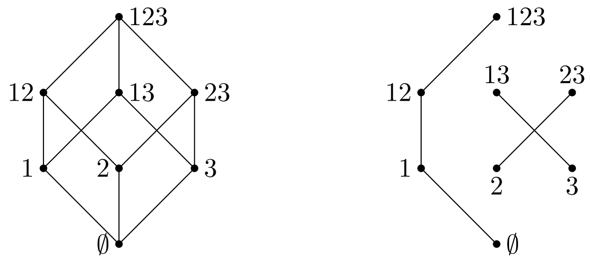


図 4.2.2 Boole 代数 B_3 と列 μ_0, μ_1, μ_3 から作ったグラフ G

4.3 線形代数を用いた Sperner の定理の証明

命題 4.4 は組み合わせ論的な条件が Sperner 性を保証するという話であった. その組み合わせ論的条件は, 次の補題 4.5 のような線形代数的な条件から従う. 集合 S に対して $\mathbb{R}S$ で S を基底とする実線形空間を表すことにする.

補題 4.5. P を次数付き半順序集合とし, 以下の二条件を満たす線形写像 $U\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ が存在すると仮定する.

- U は単射.
- 任意の $x \in P_i$ に対して, $U(x)$ は $x < y$ である $y \in P_{i+1}$ の線形結合である. (この時 U を上昇写像 (order-raising operator) と呼ぶ.)

この時, 順序許容写像 $\mu\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ が存在する.

同様に, 次の二条件を満たす線形写像 $U\colon \mathbb{R}P_{i+1} \to \mathbb{R}P_i$ があれば, 順序許容写像 $\mu\colon \mathbb{R}P_{i+1} \to \mathbb{R}P_i$ が存在する.

- U は全射.
- U は上昇写像.

証明 $U\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ が単射上昇写像だと仮定する. 基底 P_i と P_{i+1} を適当に番号付けして得られる U の表現行列を $[U]$ で表す. つまり, $P_i = \{x_1, \dots, x_{p_i}\}$, $P_j = \{y_1, \dots, y_{p_{i+1}}\}$ として

$$[U(x_1) \ \cdots \ U(x_{p_i})] = [y_1 \ \cdots \ y_{p_{i+1}}][U]. \tag{4.3.1}$$

U は単射なのでその階数は $p_i = \dim \mathbb{R}P_i$. 従って $[U]$ の行ベクトルのうち p_i 個を選んで線形独立であるようにできる. 必要なら P_{i+1} の番号付けを取り換えて, $[U]$ の最初の p_i 個の行ベクトルが線形独立だと仮定できる.

$[U]$ の最初の p_i 個の行ベクトルを取ってできる p_i 次正方行列を $A = [a_{k,l}]_{k,l=1}^{p_i}$ と書く. A の各行は線形独立だから, p_i 次対称群を $\mathfrak{S}_{p_i}$ で, その元 $\pi \in \mathfrak{S}_{p_i}$ の符号を $\mathrm{sgn}(\pi)$ で表せば

$$0 \neq \det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p_i}} \mathrm{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} \cdots a_{p_i,\pi(p_i)}.$$

従ってある $\pi \in \mathfrak{S}_{p_i}$ が存在して $a_{1,\pi(1)} \cdots a_{p_i,\pi(p_i)} \neq 0$. よって, この π について, 全ての $k = 1, 2, \dots, p_i$ に対して $a_{k,\pi(k)} \neq 0$. ここで (4.3.1) から

$$U(x_l) = \sum_{k=1}^{p_{i+1}} y_k [U]_{k,l} = \sum_{k=1}^{p_i} y_k a_{k,l} + \sum_{k=p_i+1}^{p_{i+1}} y_k [U]_{k,l}$$

となることに注意して, 各 $k = 1, 2, \dots, p_i$ に対して $l = \pi(k)$ としてみると, $U(x_{\pi(k)})$ に y_k が現れることが分かる. U は上昇写像だから $x_{\pi(k)} < y_k$. そこで $\mu\colon P_i \to P_{i+1}$ を $\mu(x_k) := y_{\pi^{-1}}(k)$ と定義すれば, これは順序許容写像である.

$U\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ が全射上昇写像の場合も同様で, 上の議論で行列 $[U]$ の代わりにその転置 ${}^t[U]$ を用いればよい. □

命題 4.4 と補題 4.5 を Boole 代数 B_n に適用したい. その為には線形写像 $U_i\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to (B_n)_{i+1}$ であって補題 4.5 の条件を満たすものを見つければよい.

定義. 各 $i = 0, 1, \dots, n-1$ に対して線形写像 $U_i\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i+1}$ を次で定義する.

$$U_i(x) := \sum_{y \in (B_n)_{i+1},\, y > x} y, \quad x \in (B_n)_i. \tag{4.3.2}$$

定義から U_i は上昇写像である. 実は更に, $i < n/2$ なら U_i は単射で, $i \geq n/2$ なら全射である. そのことを示すために, もう一種類, 線形写像を導入する.

定義. 各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して線形写像 $D_i\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i-1}$ を次で定義する.

$$D_i(y) := \sum_{x \in (B_n)_{i-1},\, x < y} x, \quad y \in (B_n)_i. \tag{4.3.3}$$

基底 $(B_n)_i$ 達をそれぞれ適当に番号付けして得られる表現行列を $[U_i]$ 及び $[D_i]$ と書けば

$$[D_i] = {}^t[U_{i-1}] \tag{4.3.4}$$

となることに注意する.

補題 4.6. $i = 0, 1, \dots, n$ に対して, $I_i := \mathrm{id}_{\mathbb{R}(B_n)_i}$ と書くと

$$D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i = (n-2i)I_i.$$

但し $U_n := 0$, $D_0 := 0$ と定めた.

証明 任意の $x \in (B_n)_i$ に対して $D_{i+1}U_i(x) - U_{i-1}D_i(x) = (n-2i)x$ となることを示せばよい. $(B_n)_i$ の記述 (4.1.1) を思い出して $D_{i+1}U_i(x)$ を計算すると

$$D_{i+1}U_i(x) = D_{i+1}\Big(\sum_{\substack{|y|=i+1 \\ x \subsetneq y}} y\Big) = \sum_{\substack{|y|=i+1 \\ x \subsetneq y}} \sum_{\substack{|z|=i \\ z \subsetneq y}} z.$$

もし $z \in (B_n)_i$ が $|x \cap z| < i-1$ を満たすなら, $x, z \subsetneq y$ となる $y \in (B_n)_{i+1}$ は存在しない. 従ってそのような z は上の和には寄与しない. また $z \in (B_n)_i$ が $|x \cap z| = i-1$ を満たすなら, $x, z \subsetneq y$ となる $y \in (B_n)_{i+1}$ は $y = x \cup z$ の一つのみである. 最後に $z = x$ なら, $x \subsetneq y$ となる任意の $y \in (B_n)_{i+1}$ で良くて, それらは $n-i$ 個ある ($y \setminus x$ の選び方は $\binom{n-i}{1} = n-i$). 従って

$$D_{i+1}U_i(x) = (n-i)x + \sum_{|z|=i,\, |x\cap z|=i-1} z.$$

同様に $U_{i-1}D_i(x)$ を計算すると (問題 4.6)

$$U_{i-1}D_i(x) = ix + \sum_{|z|=i,\, |x\cap z|=i-1} z. \tag{4.3.5}$$

従って $D_{i+1}U_i(x) - U_{i-1}D_i(x) = (n-2i)x$ となる. □

発表用問題 4.6 (解答は 4.6)**.** (4.3.5) を示せ.

定理 4.7. 線形写像 U_i は $i < n/2$ なら単射であり, $i \geq n/2$ なら全射である.

証明 (4.3.4) より $U_{i-1}D_i$ の表現行列は $[U_{i-1}D_i] = [U_{i-1}][D_i] = {}^t[D_i][D_i]$ となる. 一般に, 実行列 M とその置換行列 ${}^tM$ との積は半正定値 (positive semi-definite) であり, 固有値は全て非負である. 従って $U_{i-1}D_i$ の固有値は全て非負. すると補題 4.6 の関係式 $D_{i+1}U_i = U_{i-1}D_i + (n-2i)I_i$ から $D_{i+1}U_i$ の固有値は $n-2i$ 以上である. そこで $i < n/2$ を仮定すると, $D_{i+1}U_i$ の固有値は全て正であり, $D_{i+1}U_i$ が可逆なことが分かる. 特に U_i は単射である.

$i \geq n/2$ の場合は, 半正定値性の議論から $D_{i+2}U_{i+1}$ の固有値が全て非負なので, 補題 4.6 の $U_iD_{i+1} = D_{i+2}U_{i+1} + (2i+2-n)I_{i+1}$ から U_iD_{i+1} の固有値は $2i+2-n$ 以上, つまり正であることが分かり, すると U_iD_{i+1} が可逆だから U_i は全射だと分かる. □

命題 4.4, 補題 4.5 及び定理 4.7 から Sperner の定理 (系 4.8) が従う.

Sperner の定理の証明は他にも幾つか知られていて, 例えばテキスト [S] の 38 ページ以降には, Lubell による簡潔な証明 [Lu66] が解説されている[9]. また 39 ページ以降にはより直接的な証明も解説されている.

9) この論文は全部で 1 ページ, 実質的な部分は 1 段落です.

レポート問題 (締切: 5/21 13:00)

レポート問題 4 ([S, Exercises for Chapter 4, 2 (a)]). $P = (P, \leq)$ を半順序集合とする. P から自分自身への写像 $f : P \to P$ は, 任意の $x, y \in P$ に対して $x \leq y$ ならば $f(x) \leq f(y)$ となるとき, 順序を保つ写像と呼ばれる.

(1) P が有限半順序集合で $f : P \to P$ が順序を保つ全単射ならば, 逆写像 f^{-1} も順序を保つことを示せ.

(2) P が有限ではない半順序集合の場合, 前項 (1) が成り立つとは限らないことを示せ.

5 Boole 代数上の群作用 その 1 (5/21)

今回の内容はテキスト [S, Chapter 5] に基づく.

5.1 集合上の群作用

集合上の群作用の概念を導入しよう.

定義. 群 G の集合 X 上の**作用**[10)] (action of G on X) とは, 各 $x \in X$ と $\pi \in G$ に対して $\pi(x) \in X$ が定められていて, 次が成り立つもののことをいう.

- 単位元 $e \in G$ と任意の $x \in X$ に対して $e(x) = x$.
- 任意の $x \in X$ と $\pi, \sigma \in G$ に対して

$$\pi(\sigma(x)) = (\pi\sigma)(x). \tag{5.1.1}$$

群作用は $\sigma \cdot x$ や $\sigma.x$ の様に表すこともある.

集合 X から自分自身への全単射全体がなす集合は写像の合成 $\circ$ でもって群 $\mathfrak{S}_X$ をなす[11)]. これを X の**置換群** (the permutation group of X) と呼ぶ[12)]. 単位元は恒等写像 id_X である. 三つ組みとして書くと

$$\mathfrak{S}_X := \bigl(\{f \colon X \to X \mid \text{全単射}\}, \circ, \mathrm{id}_X\bigr).$$

群 G の集合 X 上の作用を与えることは, 群準同型 $\varphi \colon G \to \mathfrak{S}_X$ を与えることと同値である. 実際,

(1) 群作用が与えられれば写像 $X \ni x \mapsto \pi(x) \in X$ が定まるが, これは全単射 (問題 5.2). そこで

$$\varphi(\pi) := \bigl(x \mapsto \pi(x)\bigr) \in \mathfrak{S}_X$$

とすれば写像 $\varphi \colon G \to \mathfrak{S}_X$ が定まるが, これは群準同型である (問題 5.2).

(2) 逆に群準同型 $\varphi \colon G \to \mathfrak{S}_X$ が与えられたとする. $x \in X$ に対して $\pi(x) := \bigl(\varphi(\pi)\bigr)(x) \in X$ とすると (5.1.1) が確かめられる (問題 5.2).

発表用問題 5.2 (解答は 5.2)**.** 上記の議論の細部を補え.

例 5.1. 群作用の例を四つ挙げる.

(a) $\mathbb{R}$ を加法でもって Abel 群とみなす. xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点を, 座標原点を中心として角度 $\alpha \in \mathbb{R}$ で (反時計回りに) 回転させることで, 加法群 $\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}^2$ 上の作用が定まる. 式で書くと

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

対応する群準同型を $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathfrak{S}_{\mathbb{R}^2}$ と書くと, φ の核 $\operatorname{Ker}\varphi$ は $2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

---

10) これを左作用と呼ぶこともあります. 実は右作用というのもあって, それと区別したい時に使われます.

11) $\mathrm{Aut}(X)$ と書くこともあります.

12) $\mathfrak{S}_X$ の任意の部分群のことも置換群と呼ぶことがあるので, それと区別して X の全置換群と呼ぶこともあります

(b)同じ群 $\mathbb{R}$ と集合 $\mathbb{R}^2$ について, (a) とは別の作用を考えよう. $\mathbb{R}^2$ の点を x 軸方向に $\alpha \in \mathbb{R}$ 平行移動させることで, 加法群 $\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}^2$ 上の作用が定まる. 式で書くと

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+\alpha \\ y \end{bmatrix}.$$

この作用は**忠実**[13] (faithful) である. つまり対応する群準同型の核は自明群 $\{0\} \subset \mathbb{R}$ である.

(c)巡回群の直積 $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ の集合 $X = \{a,b,c,d\}$ 上の忠実な作用が次で一意に定まる (問題 5.3).

$$(0,1)\cdot a = b, \quad (0,1)\cdot b = a, \quad (0,1)\cdot c = c, \quad (0,1)\cdot d = d,$$
$$(1,0)\cdot a = a, \quad (1,0)\cdot b = b, \quad (1,0)\cdot c = d, \quad (1,0)\cdot d = c$$

(d)前項 (c) とは別に, $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の $X = \{a,b,c,d\}$ 上の忠実な作用が以下で一意に定まる (問題 5.4):

$$(0,1)\cdot a = b, \quad (0,1)\cdot b = a, \quad (0,1)\cdot c = d, \quad (0,1)\cdot d = c,$$
$$(1,0)\cdot a = c, \quad (1,0)\cdot b = d, \quad (1,0)\cdot c = a, \quad (1,0)\cdot d = b.$$

発表用問題 5.3 (解答は 5.3)**.** 例 5.1 (c) で群作用が一意に定まり, それが忠実であることを説明せよ.

発表用問題 5.4 (解答は 5.4)**.** 例 5.1 (d) で群作用が一意に定まり, それが忠実であることを説明せよ.

次に群作用の軌道の概念を導入する.

定義. 集合 X に群 G が作用しているとする.

(1) $x, y \in X$ に対し $\pi \in G$ があって $\pi(x) = y$ となるときに $x \sim y$ とすることで X 上の同値関係 $\sim$ が定まる (問題 5.5). $x \sim y$ の時に x と y は G **同値** (G-equivalent) であるという.

(2) $x \in X$ に対し次の部分集合 $Gx \subset X$ を x の G **軌道** (G-orbit) という.

$$Gx := \{\pi(x) \mid \pi \in G\}.$$

群作用の記号に合わせて, $G \cdot x$ や $G.x$ といった記号も用いられる.

(3) G 軌道全体のなす集合を X/G と書き, G **の作用による** X **の商** (quotient) と呼ぶ.

発表用問題 5.5 (解答は 5.5)**.** G 同値 $\sim$ が X 上の同値関係を定めることを示せ.

発表用問題 5.6 (解答は 5.6)**.** $x, y \in X$ に対し $x \sim y$ であることの必要十分条件は $Gx = Gy$ であることを示せ.

発表用問題 5.7 (解答は 5.7)**.** $x \in X$ の G 軌道 Gx は, 同値関係としての G 同値 $\sim$ による x を含む同値類に他ならないことを説明せよ.

---

13) **効果的** (effective) とも言います.

発表用問題 5.8 (解答は 5.8)**.** G 軌道全体の集合 X/G を用いると, G 同値 $\sim$ による X の分割は次のように表されることを説明せよ．この分割を G の作用による X の**軌道分解** (orbit decomposition) と呼ぶ.

$$X = \bigsqcup_{Gx \in X/G} Gx. \tag{5.1.2}$$

例 5.2. 例 5.1 に沿って軌道の例を説明しよう.

(1) 例 5.1 (a) について, $G = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$ とすると, 軌道は原点 $C_0 := \{(0,0)\}$ 及び各 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ を半径とする円周 $C_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ である．よって群作用による商 $\mathbb{R}^2/G$ は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ と同一視できて, 分割 (5.1.2) は以下の様に書ける:

$$\mathbb{R}^2/G = \{C_r \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} = \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} C_r.$$

(2) 例 5.1 (b) について, $G = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$ とすると, 軌道は各 $\eta \in \mathbb{R}$ を y 切片とする x 軸と平行な直線 $H_\eta := \{(x,\eta) \mid x \in \mathbb{R}\}$ である．よって群作用による商 $\mathbb{R}^2/G$ は $\mathbb{R}$ と同一視できて, 分割 (5.1.2) は以下の様に書ける:

$$\mathbb{R}^2/G = \{H_\eta \mid \eta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{\eta \in \mathbb{R}} H_\eta.$$

(3) 例 5.1 (c) の軌道は $\{a,b\}$ と $\{c,d\}$ の二つである.

(4) 例 5.1 (d) の軌道は $\{a,b,c,d\}$ の一つ．従ってこの群作用は次の定義の意味で推移的である.

定義. 軌道が一つである群作用は**推移的** (transitive) だと呼ばれる．言い換えると, 任意の $x,y \in X$ に対し $\pi \in G$ が存在して $\pi(x) = y$ となる時, これを X 上の推移的な群 G の作用と呼ぶ.

5.2 半順序集合上の群作用

集合 X 上の群 G の作用は群準同型 $G \to \mathfrak{S}_X$ と同値であったことを思い出そう (問題 5.2).

定義. $P = (P, \leq)$ を半順序集合とする

(1) P の**自己同型** (automorphism) とは半順序集合としての同型 $\varphi\colon P \to P$ のことである．つまり, φ は全単射であって順序写像 ($x, y \in P$, $x \leq y$ ならば $\varphi(x) \leq \varphi(y)$) であり, 更に逆写像 φ^{-1} も順序写像であるもののことである.

(2) P の自己同型全体は写像の合成でもって群をなす．これを $\mathrm{Aut}(P)$ と書いて P の**自己同型群** (automorphism group) と呼ぶ.

定義. 半順序集合 P 上の群 G の作用とは, 群準同型 $G \to \mathrm{Aut}(P)$ のことを言う.

Boole 代数 B_n の自己同型群を考えよう．$\mathfrak{S}_n$ で n 次対称群, つまり n 文字集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換群を表す.

例. 半順序集合 P として階数 n の Boole 代数 B_n を考える．集合としては $B_n = \{x \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}\}$ であり, 特に $|B_n| = 2^n$ であった．任意の置換 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ と $x = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in B_n$ に対して

$$\pi(x) := \{\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_k)\} \subset \{1, \ldots, n\} \tag{5.2.1}$$

で写像 $\pi\colon B_n \to B_n$ を定めると, 写像 π は半順序集合 B_n の自己同型である (問題 5.9). 更に対応

$$\mathfrak{S}_n \ni \pi \longmapsto (\pi\colon B_n \to B_n) \in \mathrm{Aut}(B_n) \tag{5.2.2}$$

は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の B_n 上の作用を定める (問題 5.10). 実は次の群同型が成立する (レポート問題 5)

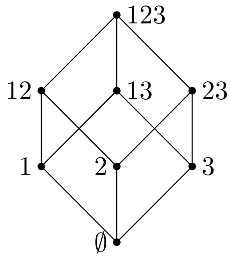
$$\mathrm{Aut}(B_n) \simeq \mathfrak{S}_n.$$

発表用問題 5.9 (解答は 5.9)**.** (5.2.1) で定めた写像 $\pi\colon B_n \to B_n$ が半順序集合 B_n の自己同型であることを示せ.

発表用問題 5.10 (解答は 5.10)**.** (5.2.2) によって $\mathfrak{S}_n$ の B_n 上の作用が定まることを説明せよ.

対称群 $\mathfrak{S}_n$ が B_n 上に作用するので, $\mathfrak{S}_n$ の任意の部分群の作用も定まることに注意しよう.

例 5.3. $n = 3$ とする. 上記の議論によって, 単位元 e と隣接置換 $(1, 2)$ からなる位数 2 の部分群 $G \subset \mathfrak{S}_3$ が Boole 代数 $B_3 = \{x \subseteq \{1, 2, 3\} = 123\}$ に作用する. e の作用は自明. $(1, 2)$ の作用では置換 $1 \leftrightarrow 2$ が起きるが 3 は固定. この作用での軌道は以下の図中のようになる.



$G123 = \{123\}$

$G12 = \{12\}$ $\quad$ $G13 = \{13, 23\}$

$G1 = \{1, 2\}$ $\quad$ $G3 = \{3\}$

$G\emptyset = \{\emptyset\}$

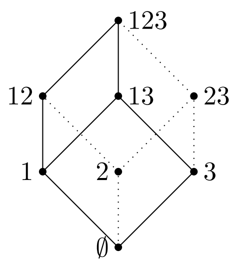
半順序集合 P に有限群 G が作用しているとしよう. 半順序を忘れて P を集合と見なしても G の作用が定まっているので, 商, つまり G 軌道全体の集合 P/G が定まる. この P/G に半順序が次のように定まる: $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}' \in P/G$ を G 軌道として, ある $x \in \mathfrak{o}$ と $y \in \mathfrak{o}'$ が存在して P の半順序について $x \leq y$ となる時に $\mathfrak{o} \leq \mathfrak{o}'$ と定める.

発表用問題 5.11 (解答は 5.11)**.** 上記の P/G 上の $\leq$ が半順序であることを確かめよ.

定義. 上で得られた半順序集合 $P/G = (P/G, \leq)$ を商半順序集合[14] (**quotient poset**) と呼ぶ.

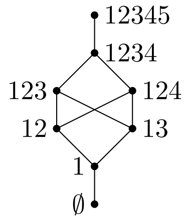
例 5.4. (5.2.2) で定めた対称群 $\mathfrak{S}_n$ の Boole 代数 B_n 上の作用を考えよう.

(1) 例 5.3 を思い出そう. $n = 3$ であり, G は e と $(1, 2)$ からなる $\mathfrak{S}_3$ の部分群であった. 商半順序集合 B_3/G の Hasse 図は以下のようになる. 但し G 軌道はその元の一つだけを取って表した.



14) この訳語はこの講義ノート特有のものです.

(2) $n=5$ とし, G は $(1,2,3,4,5)$ が生成する位数 5 の $\mathfrak{S}_5$ の部分群とする. 商半順序集合 B_5/G の Hasse 図は以下のようになる.



5.3 商半順序集合 B_n/G

引き続き (5.2.2) で定めた対称群 $\mathfrak{S}_n$ の Boole 代数 B_n 上の作用を考えよう. §4.1 で定めた次数付き半順序集合に関する用語を用いる. 特に i 番目のレベル $(B_n)_i$ を思い出して欲しい.

命題 5.5. 部分群 $G \subseteq \mathfrak{S}_n$ による商半順序集合 B_n/G は階数 n の次数付きであり, 更に**階数に関して対称的**[15] (rank-symmetric), つまり i 番目のレベルの濃度 $p_i := |(B_n/G)_i|$ について次が成立する:

$$p_i = p_{n-i} \quad (\forall\, i = 0,1,\ldots,n).$$

証明 各 G 軌道 $\mathfrak{o} \in B_n/G$ について, $x \in \mathfrak{o}$ の B_n における階数 i は x の取り方によらず, $\mathfrak{o}$ も B_n/G における階数も i になる. 特に $12\cdots n \in B_n$ の G 軌道 $\{12\cdots n\} \in B_n/G$ は階数 n であり, B_n/G が階数 n の次数付き半順序集合であることが分かる. また p_i は軌道 $\mathfrak{o} \in (B_n)_i/G$ の数と一致する. そこで $x \in B_n$ に対して

$$\overline{x} := 12\cdots n \setminus x = \{i = 1,2,\ldots,n \mid i \notin x\}$$

と定めると, G 軌道 $\{x_1,\ldots,x_j\} \in B_n/G$ に対して次は同値である:

$$\{x_1,\ldots,x_j\} \in (B_n)_i/G \iff \{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_j\} \in (B_n)_{(n-i)}/G \tag{5.3.1}$$

従って $p_i = |(B_n)_i/G| = |(B_n)_{n-i}/G| = p_{n-i}$ が成立する. □

発表用問題 5.12 (解答は 5.12)**.** (5.3.1) を示せ.

$i = 0,1,\ldots,n$ に対して $\mathbb{R}(B_n)_i$ でレベル $(B_n)_i$ を基底とする実線形空間を表す. 各 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ に対して (同じ記号 π を用いて) 線形変換 $\pi\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_i$ を

$$\pi\Bigl(\sum_{x\in(B_n)_i} c_x x\Bigr) := \sum_{x\in(B_n)_i} c_x \pi(x) \quad (c_x \in \mathbb{R}) \tag{5.3.2}$$

で定める. 基底 $(B_n)_i$ を適当に並べて得られる π の表現行列は置換行列 (問題 3.2) であることに注意しよう.

15) この訳語はこの講義ノート特有のものです.

再び $G \subseteq \mathfrak{S}_n$ を部分群とする．各 $\pi \in G$ が (5.3.2) によって $\mathbb{R}(B_n)_i$ の線形変換を与えているが，それらで不変な元のなす部分空間 $\mathbb{R}(B_n)_i^G$ を考えよう:

$$\mathbb{R}(B_n)_i^G := \{v \in \mathbb{R}(B_n)_i \mid \pi(v) = v \ \forall \pi \in G\}.$$

補題 5.6. 群 G のレベル $(B_n)_i$ 上の作用による G 軌道 $\mathfrak{o} \in (B_n)_i/G$ に対して

$$v_{\mathfrak{o}} := \sum_{x \in \mathfrak{o}} x \in \mathbb{R}(B_n)_i$$

と定めると $v_{\mathfrak{o}} \in \mathbb{R}(B_n)_i^G$ であり，更に $\{v_{\mathfrak{o}} \mid \mathfrak{o} \in (B_n)_i/G\}$ は $\mathbb{R}(B_n)_i^G$ の基底である．

証明　前半について．任意の $\pi \in G$ と軌道 $\mathfrak{o}$ 及び $x \in \mathfrak{o}$ について，軌道の定義から $\pi(x) \in \mathfrak{o}$ となる．また π は $(B_n)_i$ の元を置換するから，π は $\mathfrak{o}$ に含まれる元を置換する．従って $\pi(v_{\mathfrak{o}}) = v_{\mathfrak{o}}$ であり，$v_{\mathfrak{o}} \in \mathbb{R}(B_n)_i^G$ が従う．

後半について．各 $x \in (B_n)_i$ について，それが $v_{\mathfrak{o}}$ に現れるような軌道 $\mathfrak{o}$ は一つしかない．従って $\{v_{\mathfrak{o}} \mid \mathfrak{o} \in (B_n)_i/G\}$ は線形独立であり，後は $\{v_{\mathfrak{o}} \mid \mathfrak{o} \in (B_n)_i/G\}$ が $\mathbb{R}(B_n)_i^G$ を張ることを示せばよい．

各 $x \in (B_n)_i$ に対して G の部分群

$$G_x := \{\pi \in G \mid \pi(x) = x\} \tag{5.3.3}$$

を x **の固定部分群** (stabilizer of x) と呼ぶ．$\pi, \sigma \in G$ に対して $\pi(x) = \sigma(x)$ であることと左剰余集合が一致する，つまり $\pi G_x = \sigma G_x$ であることは同値 (問題 5.13)．このことから $\sum_{\pi \in G} \pi(x) \in \mathbb{R}(B_n)_i$ には，軌道 Gx の各元 $y \in Gx$ が $|G_x|$ 回現れることが分かる．つまり

$$\sum_{\pi \in G} \pi(x) = |G_x|\, v_{Gx}. \tag{5.3.4}$$

さて，$v \in \mathbb{R}(B_n)_i^G$ を任意に取って $v = \sum_{x \in (B_n)_i} c_x x$, $c_x \in \mathbb{R}$ と表示する．この v に $\pi \in G$ を作用させたものの総和 $\sum_{\pi \in G} \pi(x)$ を考えよう．$v \in \mathbb{R}(B_n)_i^G$ より任意の $\pi \in G$ について $\pi(v) = v$ だから

$$|G|\, v = \sum_{\pi \in G} \pi(x) = \sum_{\pi \in G} \sum_{x \in (B_n)_i} c_x \pi(x) = \sum_{x \in (B_n)_i} c_x \sum_{\pi \in G} \pi(x) = \sum_{x \in (B_n)_i} c_x\, |G_x|\, v_{Gx}.$$

但し最後の等式で (5.3.4) を用いた．従って v は v_{Gx} (つまり $v_{\mathfrak{o}}$) 達の線形結合で書ける．□

発表用問題 5.13 (解答は 5.13)**.** 集合 X に群 G が作用しているとする．各 $x \in X$ に対して固定部分群を G_x と書く (式 (5.3.3) 参照)．この時，$\pi, \sigma \in G$ に対して $\pi(x) = \sigma(x) \iff \pi G_x = \sigma G_x$ を示せ．

次に §4.3, (4.3.2) で導入した上昇写像 $U_i : \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i+1}$ を $\mathbb{R}(B_n)_i^G$ に制限するとどうなるかを考えよう．定義を思い出すと，$x \in (B_n)_i$ に対して

$$U_i(x) := \sum_{y \in (B_n)_{i+1},\, y > x} y.$$

補題 5.7. $v \in \mathbb{R}(B_n)_i^G$ ならば $U_i(v) \in \mathbb{R}(B_n)_{i+1}^G$.

証明　任意の $\pi \in G$ は B_n の自己同型だから, B_n において $x < y$ であることと $\pi(x) < \pi(y)$ であることは同値である. 従って任意の $\pi \in G$ と $x \in (B_n)_i$ に対して

$$U_i(\pi(x)) = \pi(U_i(x)).$$

よって $\mathbb{R}(B_n)_i$ 上の線形写像として $U_i\pi = \pi U_i$ である. すると任意の $\pi \in G$ と $v \in \mathbb{R}(B_n)_i^G$ に対して

$$\pi(U_i(v)) = U_i(\pi(v)) = U_i(v),$$

つまり $U_i(v) \in \mathbb{R}(B_n)_{i+1}^G$ となる. □

レポート問題

レポート問題 5 (解答 5)**.** 階数 n の Boole 代数 B_n の半順序集合としての自己同型群 $\mathrm{Aut}(B_n)$ は対称群 $\mathfrak{S}_n$ と同型であることを示せ.

(ヒント: (5.2.2) の写像 $\mathfrak{S}_n \ni \pi \mapsto (\pi\colon B_n \to B_n) \in \mathrm{Aut}(B_n)$ は問題 5.10 より群準同型である. それが同型であることを示せばよい.)

5 Boole 代数上の群作用 その 2 (5/28)

今回の内容はテキスト [S, Chapter 5, pp.48–52] に基づく．前回, 半順序集合 B_n と部分群 $G \subseteq \mathfrak{S}_n$ から商半順序集合 B_n/G を構成したことを思い出そう．

5.4 商半順序集合 B_n/G の Sperner 性

階数 n の次数付き半順序集合 P は $p_i = |P_i|$ が i の函数として極大値を一か所で持つとき, つまり $0 \le j \le n$ が存在して

$$p_0 \le p_1 \le \ldots \le p_j \ge p_{j+1} \ge \ldots \ge p_n$$

が成立する時, **階数に関して unimodal**[16)] (rank-unimodal) と呼ばれる．Boole 代数 B_n は $p_i = \binom{n}{i}$ なので階数に関して対称的かつ unimodal である．また, 命題 4.4 を思い出すと, その主張にある不等式 (4.2.3) は階数に関する unimodal 性に他ならない．さて, 次の定理が今回の主内容である．

定理 5.8. 任意の部分群 $G \subseteq \mathfrak{S}_n$ に対して, 商半順序集合 B_n/G は階数 n の次数付き半順序集合であって, 階数に関して対称的かつ unimodal であり, 更に Sperner 性を持つ．

証明 $P := B_n/G$ と書くと, 命題 5.5 より P は階数 n の次数付き半順序集合であって階数に関して対称的. 残りの性質を示す為に, 命題 4.4 と補題 4.5 を思い出そう．それらと (4.3.2) の上昇写像 $U_i \colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i+1}$ を使って, 定理 4.7 で Boole 代数 B_n の Sperner 性と階数に関する unimodal 性が示せたように, P についても補題 4.5 の条件を満たす上昇写像 $\widehat{U}_i \colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ を作りたい.

$\mathbb{R}P_i$ 上の線形写像を定義するには基底の各元 $\mathfrak{o} \in P_i$ が写る先を指定すればよい．ここで $P_i = (B_n/G)_i = (B_n)_i/G$ であったことと補題 5.6 を思い出すと, $\mathfrak{o} \mapsto v_{\mathfrak{o}} = \sum_{x \in \mathfrak{o}} x$ は線形空間の同型 $\mathbb{R}P_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}(B_n)_i^G$ を定めることが分かる．一方補題 5.7 より, 上昇写像 $U_i \colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i+1}$ を $\mathbb{R}(B_n)_i^G$ に制限すれば $\overline{U}_i := U_i|_{(B_n)_i^G} \colon \mathbb{R}(B_n)_i^G \to \mathbb{R}(B_n)_{i+1}^G$ が得られる．そこで上の同型と合成すれば, 線形写像 $\widehat{U}_i \colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ が得られる:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}(B_n)_i \arrow[r, "U_i"] & \mathbb{R}(B_n)_{i+1} \\
\mathbb{R}(B_n)_i^G \arrow[u, hook] \arrow[r, "\overline{U}_i"] & \mathbb{R}(B_n)_{i+1}^G \arrow[u, hook] \\
\mathbb{R}P_i \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, dotted, "\widehat{U}_i"] & \mathbb{R}P_{i+1} \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

さて, こうして得られた $\widehat{U}_i$ が上昇写像であることを示そう．$\mathfrak{o} \in (B_n)_i/G$ に対して

$$\widehat{U}_i(\mathfrak{o}) = \sum_{\mathfrak{o}' \in (B_n)_{i+1}/G} c_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}'} \mathfrak{o}', \quad c_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}'} \in \mathbb{R} \tag{5.4.1}$$

16) この訳語は この講義ノート特有のものです．

と展開する．示したいのは $c_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}'} \neq 0$ ならば B_n/G において．$\mathfrak{o}' > \mathfrak{o}$ となることである．(5.4.1) と $\widehat{U}_i$ の定義から

$$U_i(v_{\mathfrak{o}}) = \sum_{\mathfrak{o}' \in (B_n)_{i+1}/G} c_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}'} v_{\mathfrak{o}'} \tag{5.4.2}$$

となることに注意する．U_i は上昇写像であり，また $v_{\mathfrak{o}'} = \sum_{x' \in \mathfrak{o}'} x'$ なので，(5.4.2) で $c_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}'} \neq 0$ ならば，ある $x' \in \mathfrak{o}'$ と $x \in \mathfrak{o}$ があって B_n において $x' > x$ となっている．しかしこれは B_n/G の半順序の定義から $\mathfrak{o}' > \mathfrak{o}$ を意味する．従って $\widehat{U}_i$ が上昇写像であることが分かった．

再び補題 4.5 と定理 4.7 の証明を思い出して，$i < n/2$ ならば $\widehat{U}_i$ が単射であることを示そう．定理 4.7 より $i < n/2$ ならば U_i は単射なので，その制限 $\overline{U}_i = U_i|_{(B_n)_i^G}$ も単射．従って同型を合成して得られた $\widehat{U}_i$ も単射である．

$i \geq n/2$ の場合については，定理 4.7 の証明と同様に "下降写像" $\widehat{D}_i : \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i-1}$ を用いる．その定義は $\widehat{U}_i$ と同様で，§4.3, (4.3.3) の $D_i : \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i-1}$ を $\mathbb{R}(B_n)_i^G$ に制限して，同型 $\mathbb{R}P_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}(B_n)_i^G$ と合成すればよい．その結果，$i \geq n/2$ ならば $\widehat{U}_i$ が全射であることが示せる．

以上より $\widehat{U}_i$ 達は補題 4.5 の条件を満たす．従って，補題 4.5 と命題 4.4 より，$P = B_n/G$ は Sperner 性と階数に関する unimodal 性を持つ． □

5.5 定理 5.8 の応用

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $M := \{1, 2, \ldots, m\}$ とし，M の異なる二元からなる集合達がなす集合を

$$X := \binom{M}{2}$$

と書く (§1.1 参照)．X の元は頂点集合を M とするグラフの (ループではなくまた重複もない) 辺と思える．すると X 上の Boole 代数 B_X について，元 $x \in B_X$ はそのような辺の集まり，つまり頂点集合を M とする単純グラフ思える (問題 1.2 参照)．

X に作用する群として，$G \subseteq \mathfrak{S}_X$ を次のように定める．$X = \binom{M}{2}$ の元を $[i,j] \in X$ $(i, j \in M,$ $i \neq j)$ と書く．また頂点集合 M の置換 $\pi \in \mathfrak{S}_M$ に対して，その M への作用を $\pi.i$ $(i \in M)$ とかく．この時，各 $\pi \in \mathfrak{S}_M$ に対して

$$\widehat{\pi}.[i,j] := [\pi.i, \pi.j]$$

とすることで $\widehat{\pi} \in \mathfrak{S}_X$ が定まる．そこで集合として

$$G := \{\widehat{\pi} \in \mathfrak{S}_X \mid \pi \in \mathfrak{S}_M\}$$

と定めると，これには $\mathfrak{S}_M$ の群演算 $(\pi, \sigma) \mapsto \pi\sigma$ から

$$(\widehat{\pi}\widehat{\sigma}).[i,j] := [(\pi\sigma).i, (\pi\sigma).j]$$

によって二項演算 $(\widehat{\pi}, \widehat{\sigma}) \mapsto \widehat{\pi}\widehat{\sigma}$ が定まり，G は群になる．このように，群 G は「頂点集合 M の置換から自然に定まる $X = \binom{M}{2}$ の置換」のなす群である．

発表用問題 5.14 (解答は 5.14)**.** $m \geq 3$ の時, G が $\mathfrak{S}_M$ と群として同型であることを示せ.

ここで B_X/G を考えよう. まず G 軌道の意味を考えると, 単純グラフ $x, y \in B_X$ が同じ G 軌道に属するのは, 頂点を置き換えることで x から y が得られる時, つまり**グラフとして同型**である時に他ならない. 念のため定義を書いておこう.

定義. 二つのグラフ $G = (V, E, \varphi)$ と $G' = (V', E', \varphi')$ は, 以下の条件を満たす全単射 $f\colon V \to V'$ と $g\colon E \to E'$ が存在する時**同型** (isomorphic) だと言う: f から誘導される写像 $\left(\!\binom{f}{2}\!\right)\colon \left(\!\binom{V}{2}\!\right) \to \left(\!\binom{V'}{2}\!\right)$ について次の図式が可換である, つまり $\left(\!\binom{f}{2}\!\right) \circ \varphi = \varphi' \circ g$ が成立する.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g"'] & \left(\!\binom{V}{2}\!\right) \arrow[d, "\left(\!\binom{f}{2}\!\right)"] \\
E' \arrow[r, "\varphi'"'] & \left(\!\binom{V'}{2}\!\right)
\end{tikzcd}$$

発表用問題 5.15 (解答は 5.15)**.** 上で用いた「f から誘導される写像 $\left(\!\binom{f}{2}\!\right)\colon \left(\!\binom{V}{2}\!\right) \to \left(\!\binom{V'}{2}\!\right)$」の定義を与え, $\left(\!\binom{f}{2}\!\right)$ が全単射であることを示せ.

従って B_X/G の元は M を頂点集合とする単純グラフの同型類である. 特に

$$|B_X/G| = \text{同型でない, } m \text{ 個の頂点の単純グラフの数},$$
$$|(B_X/G)_i| = \text{同型でない, } m \text{ 個の頂点と } i \text{ 個の辺の単純グラフの数}.$$

また B_X/G において $x \leq y$ であるのは, x と y の頂点をそれぞれ適当にラベルづければ, x の辺が全て y の辺になっている, つまり x が y の **spanning subgraph** (y の部分グラフであって頂点集合が y のそれと一致するもの) と同型である時に他ならない. 図 5.5.1 に $m = 4$ の場合の B_X/G の Hasse 図と, 各頂点に対応する単純グラフを示した.

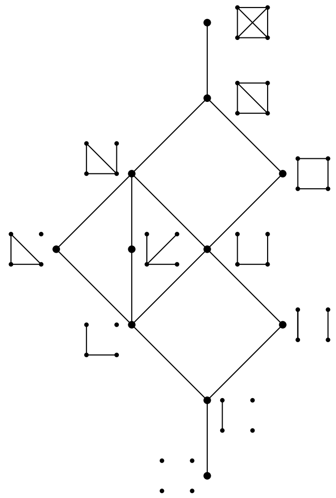


図 5.5.1 $m = 4$ **の場合の単純グラフの分類を表す** B_X/G

さて, 定理 5.8 を上の B_X/G に適用すると, 以下の主張が得られる.

定理 5.9. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $n := \binom{m}{2}$ とする.

(1) m 個の頂点と i 個の辺を持つ単純グラフの同型類の数を p_i とすると, 数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n$ は対称かつ unimodal. つまり適当な j があって,

$$p_i = p_{n-i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \quad p_0 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_j \geq p_{j+1} \geq \ldots \geq p_n.$$

(2) T を m 頂点を持つ単純グラフの集合であって, どの元も他の元の spanning subgraph になっていないものとする. このような T のうち $|T|$ を最大にするものは, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 個の辺を持つ単純グラフで同型でないもの全てからなる.

テキストにはもう一つ定理 5.8 の応用がある [S, 5.10 Theorem] が, この講義ノートでは省略する.

5.6 実零点を持つ多項式

半順序集合の話題から離れて, ここでは実数列に関する話題を一つ取り上げる. ある実区間上定義された実函数 f は, 区間内の任意の二点 x, y と任意の $0 < t < 1$ に対して

$$f\bigl(tx + (1-t)y\bigr) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

が成立するとき, **上に凸** (upward-convex) な函数, または**凹函数** (concave function) と呼ばれる.

定義. $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ を実数の有限列とする.

(1) 数列 a が対数的に凹[17] (logarithmically concave, **log-concave**) であるとは, 各 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ であることを言う.

(2) 数列 a が強く対数的に凹[18] (**strictly log-concave**) であるとは, $b_i := a_i/\binom{n}{i}$ とした時に, 各 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $b_i^2 \geq b_{i-1}b_{i+1}$ であることを言う.

発表用問題 5.16 (解答は 5.16)**.** 以下を示せ: 数列 a が strongly log-concave $\iff$ 各 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して

$$a_i^2 \geq \Bigl(1 + \frac{1}{i}\Bigr)\Bigl(1 + \frac{1}{n-i}\Bigr)a_{i-1}a_{i+1}.$$

また, a が strongly log-concave ならば log-concave.

log-concave であることと unimodal であることは以下のように関係する.

命題 5.11. $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ は非負実数の有限列であって**内部に 0 がない** (no internal zeros), つまり任意の $i < j < k$ について $a_i a_k \neq 0$ ならば $a_j \neq 0$ だとする. この時, 更に a が log-concave ならば a は unimodal である.

証明 $a_j \neq 0$ となる j が高々二つしかない場合は, 内部に 0 がないことから, 任意の $1 \leq i \leq n-1$ に対して $a_{i-1}a_{i+1} = 0$ となる. すると unimodal であることは簡単に従う. そこで $a_j \neq 0$ となる j が三つ以上あると仮定し, 背理法で証明する. 背理法の仮定から, ある $1 \leq i \leq n-1$ が存在して

17) この講義ノート特有の訳語です.
18) この講義ノート特有の訳語です.

$a_{j-1} > a_i \leq a_{i+1}$ かつ $a_{i+1} > 0$ となるが, これは $a_i^2 < a_{i-1}a_{i+1}$ を意味するので log-concave であることと矛盾する. □

そこで log-concave である為の十分条件が欲しくなるが, 次の古典的な結果がある.

定理 5.12 (Newton)**.** n 次の[19] 実数係数多項式

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^i$$

の零点が全て実数だと仮定する. この時, 数列 $b = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ は strongly log-concave, つまり数列 $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ は log-concave である. 更に全ての $0 \leq i \leq n$ について $b_i \geq 0$ ならば, 数列 b は内部に 0 を持たない (命題 5.11 参照). 特に数列 a は unimodal である.

証明 まず, 微分して得られる $n-1$ 次多項式 $P'(x)$ の零点が全て実数であることを示そう. α を $P(x)$ の重複度 $r > 1$ の零点とすると, 剰余の定理と簡単な計算で α は $P'(x)$ の重複度 $r-1$ の零点であることが分かる. また, $\alpha < \beta$ を $P(x)$ の異なる零点とすると, Rolle の定理から $\alpha < \gamma < \beta$ なる $P'(x)$ の零点 γ が存在する. この二つの主張から $P'(x)$ が $n-1$ 個以上の実零点を持つことが分かる. $\deg P'(x) = n-1$ だから, 零点はそれらで尽くされる.

さて, しばらく $1 \leq i \leq n-1$ となる i を固定して議論を進める. 前半の議論より $n-i+1$ 次の多項式 $Q(x) := \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}P(x)$ の零点は全て実. また $R(x) := x^{n-i+1}Q(1/x)$ とすると, その零点は $Q(x)$ の零点のうち 0 でないものの逆数と, 新たに付け加わる 0 で尽くされて, 結局全ての零点は実数である. 更に $S(x) := \frac{d^{n-i-1}}{dx^{n-i-1}}R(x)$ とすると, その零点もまた全て実数である. ここで直接計算で次が示せる (レポート問題 6).

$$S(x) = \frac{n!}{2}(a_{i-1}x^2 + 2a_i x + a_{i+1}). \tag{5.6.1}$$

もし $a_{i-1} = 0$ なら $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ は自明に成立する. $a_{i-1} \neq 0$ なら $S(x)$ は二次式で, 零点が全て実であることから判別式について

$$D/4 = a_i^2 - a_{i-1}a_{i+1} \geq 0.$$

これが任意の $1 \leq i \leq n-1$ について成立するので, 数列 a は log-concave である.

後は, 任意の $0 \leq i \leq n$ について $a_i \geq 0$ ならば, 数列 a は内部に 0 を持たないことを示せばよい. $a_j = 0$ となる j が存在したとして, そのうち最小のものを取る. 暫く $j \geq 1$ と仮定しよう. この j について上の議論を適用すると $S(x) = \frac{n!}{2}(a_{j-1}x^2 + a_{j+1})$. これと $S(x)$ の零点が実であること及び $a_{j-1}, a_{j+1} \geq 0$ から $a_{j+1} = 0$. もし $j+1 < k \leq n$ かつ $a_k > 0$ なる k が存在すれば, 既に示したことから $a_j = a_{j+1} = \cdots = a_{k-1} = 0$. よって上の議論を $k-1$ に適用すると $S(x) = \frac{n!}{2}a_k$. これは定数函数で零点を持たないので, 上の議論と矛盾する. 従って, $j \geq 1$ の場合, 任意の $i \geq j$ に対して $a_i = 0$ となる. $j = 0$ の場合は $a_k > 0$ となる最小の k を取って議論すると, 任意の $i \geq k$ に対して $a_i > 0$ が言える. 以上より数列 a は内部に 0 を持たない. □

---

19) テキスト [S, 5.12 Theorem] の証明では冒頭で $m := \deg P(x) \leq n$ として議論を進めていますが, 途中の数式 $S(x) = \frac{m!}{2}(a_{i-1}x^2 + 2a_i x + a_{i+1})$ は $m = n$ でないと成立しないので, 講義ノートでは最初から $m = n$ としています.

レポート問題

レポート問題 6 (解答 6)**.** 等式 (5.6.1) を示せ.

6 Young 図形と q 二項定理 (6/04)

今回の内容はテキスト [S, Chapter 6] に基づく.

6.1 分割, Young 図形, Young 束

整数の分割の概念を導入しよう.

定義. 非負整数 $n \in \mathbb{N}$ の**分割** (partition) とは広義単調減少の非負整数列であって総和が n のもののことを言う. つまり

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots), \quad \lambda_i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i \geq 1} \lambda_i = n$$

正の λ_i を分割 λ の**パート** (part) と呼び, パートの個数を λ の**長さ** (length) と呼んで $\ell(\lambda)$ で表す. また $|\lambda| := \sum_{i \geq 1} \lambda_i = n$ と書いて, それを分割 λ の**サイズ** (size) と呼ぶ.

空数列 $\emptyset = ()$ は 0 の分割とみなす. また, 同じパートを $(3,3,3,2,2,1,1,1,1) = (3^3, 2^2, 1^4)$ の様に略記する. この分割の長さは 9 である. そして, 分割とそれに 0 を任意個付け加えたものは同一視する. 例えば $(5, 2^3, 1) = (5, 2^3, 1, 0) = (5, 2^3, 1, 0, 0, 0, 0)$ で, その長さは 5 である.

非負整数 n の分割の総数 $p(n)$ を**分割数** (partition number) と呼ぶ. 以下に $p(n)$ の初めの数項と母函数を書いておく.

$$p(0) = |\{\emptyset\}| = 1, \quad p(1) = |\{(1)\}| = 1, \quad p(2) = \left|\{(2), (1^2)\}\right| = 2, \quad p(3) = \left|\{(3), (2,1), (1^3)\}\right| = 3,$$
$$p(4) = \left|\{(4), (3,1), (2^2), (2,1^2), (1^4)\}\right| = 5, \ p(5) = \left|\{(5), (4,1), (3,2), (3,1^2), (2^2,1), (2,1^3), (1^5)\}\right| = 7,$$

$$\sum_{n \geq 0} p(n) t^n = \prod_{r \geq 0} \frac{1}{1 - t^r}.$$

次に分割からなる半順序集合を一つ導入しよう.

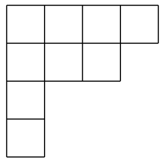
定義. $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, 長さが m 以下かつ最大のパートが n 以下の分割全ての集合を $L(m,n)$ と書く. つまり,

$$L(m,n) := \{\lambda \mid \text{分割}, \ \ell(\lambda) \leq m, \ \lambda_1 \leq n\}.$$

$\lambda, \mu \in L(m,n)$ に対し, 全ての $i = 1, 2, \dots$ について $\lambda_i \leq \mu_i$ となる時に $\lambda \leq \mu$ と定める. この $\leq$ は $L(m,n)$ 上の半順序を定める. 半順序集合 $(L(m,n), \leq)$ を **Young 束**[20] (Young lattice) と呼び, 以下 $L(m,n)$ と略記する.

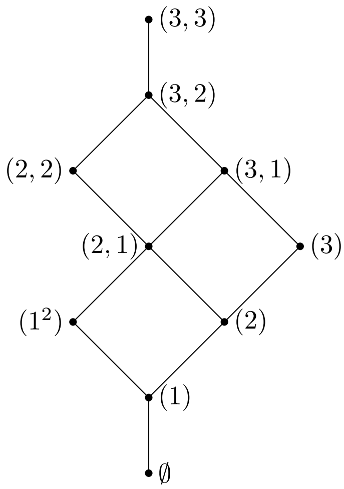
分割 λ に対して, 各行に λ_i 個の正方形を並べて表示したものを λ **の Young 図形**と呼ぶ. 例えば $(4,3,1,1)$ の Young 図形は次の図のようになる. 分割 λ に対して, $|\lambda| = \sum_{i \geq 1} \lambda_i$ はその Young 図形の箱の総数に等しい.

20) 「ヤングそく」と読みます.



以下では分割とその Young 図形を同一視する．Young 束を Young 図形の言葉で言い直すと，長方形の Young 図形 $(n^m) = (n, n, \ldots, n)$ に含まれる分割 λ 達のなす集合 $L(m, n)$ に，対応する Young 図形が $\lambda \subseteq \mu$ と包含される場合に $\lambda \leq \mu$ とすることで定まる半順序を与えたものである．

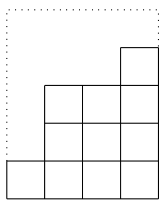
例． Young 束 $L(2, 3)$ の Hasse 図 [S, Fig. 6.1] を書いてみよう．Young 図形 $(3^2) = (3.3)$ に含まれる Young 図形を書き出すと $\emptyset$, (1), (2), (3), (1^2), $(2, 1)$, (2^2), $(3, 1)$, $(3, 2)$, (3^2) の 10 個．半順序が Young 図形の包含関係であることに注意して Hasse 図を書くと，以下のようになる．



上の $L(2, 3)$ の Hasse 図は上下対称である．命題 5.5 の用語を思い出して言い換えると，$L(2, 3)$ は階数に関して対称 (rank-symmetric) である．これは一般の Young 束に対して成立する．

命題 6.2． Young 束 $L(m, n)$ は階数 mn の，階数に関して対称な次数付き半順序集合である．また各 $\lambda \in L(m, n)$ の階数は $|\lambda|$ である．

証明 階数対称性のみ示す．$\lambda \in L(m, n)$ に対して，Young 図形の意味で $(n^m) \setminus \lambda$ を考えて上下を逆転させると分割が得られる (下図参照)．この分割を $\overline{\lambda}$ と書こう．対応 $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ は $L(m, n)$ から自分自身への全単射を定める．この全単射と $|\lambda| + |\overline{\lambda}| = mn$ から階数対称性が従う．



$L(5, 4)$
$\lambda = (4, 3, 1, 1) \subset (4^5)$
$\overline{\lambda} = (4, 3, 3, 1)$

□

発表用問題 6.1 (解答は 6.1)**．** $\lambda \in L(m, n)$ の階数が $|\lambda|$ であることを示せ．

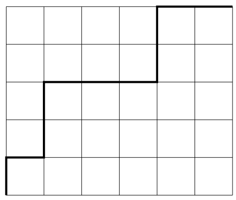
実は更に, Young 束 $L(m,n)$ は階数に関して unimodal であり, かつ Sperner 性を持つ (系 6.6). その証明が今回の主目標である.

6.2 Young 束と q 二項係数

まず $|L(m,n)|$ が幾つか求めておこう.

命題 6.3. $|L(m,n)| = \binom{m+n}{m}$.

略証 以下のように Young 図形と折れ線が一対一に対応することから従う.



$L(5,6)$
$\lambda = (4,4,1,1) \subset (6^5)$

□

Young 束 $L(m,n)$ の元で階数 i のものの個数を

$$p_i(m,n) := p_i(L(m,n)) = \left|\{\lambda \in L(m,n) \mid \text{階数 } i\}\right|$$

と書こう. 階数母函数は, 母函数の変数を q と書くと $\sum_{i\geq 0} p_i(m,n)q^i$ となる. これを求めるのがとりあえずの目標だが, 結果を先に書くと

定理 6.6. $k, j \in \mathbb{N}$, $j \leq k$ と変数 q に対して,

$$[k]_q := 1 + q + \cdots + q^{k-1}, \quad [k]_q! := [1]_q[2]_q \cdots [k]_q,$$
$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q := \frac{[k]_q!}{[j]_q![k-j]_q!} = \frac{[k]_q[k-1]_q \cdots [k-j+1]_q}{[j]_q[j-1]_q \cdots [1]_q}$$

と定める[21]. 特に $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q$ を q **二項係数** (q-binomial coefficient) と呼ぶ. すると

$$\sum_{i\geq 0} p_i(m,n)q^i = \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q.$$

特に q 二項係数は q の多項式である.

二項係数 $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ が整数であることの証明の一つに, Pascale の三角形に由来する漸化式

$$\binom{k}{j} = \binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1}$$

を用いるものがあった. q 二項係数も, 上記の漸化式の q **変形**である, 次の漸化式を満たす.

補題 6.5. $k \geq 1$ ならば

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} k-1 \\ j \end{bmatrix}_q + q^{k-j}\begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q.$$

21) テキスト [S, p.60] ではそれぞれ $\boldsymbol{(k)}$, $\boldsymbol{(k)!}$, $\boldsymbol{\binom{k}{j}}$ と書かれていますが, この講義ノートでは q 超幾何函数論や量子群の表現論でよく使われる記号を用いることにしました.

但し $\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}_q := 1$, 及び $j < 0$ または $j > k$ ならば $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q := 0$ と約束する.

証明 $[k] := [k]_q$, $[k]! := [k]_q!$, $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q$ と略記して定義通りに計算すると

$$\begin{bmatrix} k-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{k-j}\begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q = \frac{[k-1]!}{[j]![k-1-j]!} + q^{k-j}\frac{[k-1]!}{[j-1]![k-j]!} = \frac{[k-1]!}{[j-1]![k-1-j]!}\Big(\frac{1}{[j]} + \frac{q^{k-j}}{[k-j]}\Big)$$

$$= \frac{[k-1]!}{[j-1]![k-1-j]!}\frac{[k-j]+q^{k-j}[j]}{[j][k-j]} = \frac{[k-1]!}{[j-1]![k-1-j]!}\frac{[k]}{[j][k-j]} = \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}.$$

□

発表用問題 6.2 (解答は 6.2). 補題 6.5 を用いて $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q$ が q の多項式であることを示せ.

定理 6.6 の証明 $P(m,n) := \sum_{i\geq 0} p_i(m,n)q^i$ とおいて, それが条件

$$P(0,0) = 1, \quad P(m,n) < 0 \quad (m < 0 \text{ または } n < 0),$$
$$P(m,n) = P(m,n-1) + q^n P(m-1,n) \tag{6.2.1}$$

を満たすことを示せば, $P(m,n)$ と $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$ は同じ初期条件と漸化式を満たすので等しいことが分かる. このうち $P(0,0) = 1$ は $L(0,n) = \{\emptyset\}$ から従い, $m < 0$ または $n < 0$ なら $L(0,n) = \emptyset$ なので $P(m,n) = 0$ が従う. (6.2.1) を示すには, 両辺の q^i の係数を比較した

$$p_i(m,n) = p_i(m,n-1) + p_{i-n}(m-1,n) \tag{6.2.2}$$

を任意の $i \geq 0$ について示せばよい. $|\lambda| = i$ なる任意の $\lambda \in L(m,n)$ に対して, 次の二通りのどちらか一方のみが成立する.

(i)$\lambda_1 < n$, (ii) $\lambda_1 = n$.

(i) の場合, 任意の $j = 1,2,\ldots$ に対して $\lambda_j \leq \lambda_1 \leq n-1$ だから, λ は $L(m,n-1)$ に属し, かつ $|\lambda| = i$ となっている. そのような分割の個数は $p_i(m,n-1)$ である. (ii) の場合, 分割 $\mu := (\lambda_2,\lambda_3,\ldots)$ は $L(m-1,n)$ に属し, かつ $|\mu| = i - \lambda_1 = i - n$ である. 逆にそのような $\mu = (\mu_1,\mu_2,\ldots) \in L(m-1,n)$, $|\mu| = i - n$ から $\lambda := (n,\mu_1,\mu_2,\ldots)$ を作れば, この λ は (ii) を満たす. 以上の構成 $\lambda \mapsto \mu$ 及び $\mu \mapsto \lambda$ は互いに逆になっている. よって (ii) の分割 λ の個数は μ の個数 $p_{i-n}(m-1,n)$ と等しい. 従って (6.2.2) が成立する. □

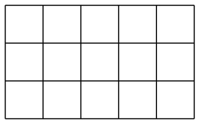
6.3 Sperner 性の証明

先に結論を述べよう.

系 6.6. Young 束 $L(m,n)$ は階数に関して対称的かつ unimodal で, Sperner 性を持つ半順序集合である.

前回の §5.4 で, Boole 代数の商半順序集合 B_s/G が階数に関して対称的かつ unimodal で, 更に Sperner 性を持つことを示した (定理 5.8). そこで, Young 束 $L(m,n)$ が Boole 代数の商で書けることを示せば系 6.6 が示せる.

まず $R = R_{m,n}$ を $m \times n$ 個の正方形が並んだ長方形とする. 集合としては単に $|R| = mn$ 個の元からなるものである. 下図に $R_{3,5}$ を示す.



また, $G = G_{m,n}$ は R の置換群 $\mathfrak{S}_R$ の部分群であって,

$$R \text{ の各行の正方形を任意に置換し, その後で行ごと置換する} \tag{6.3.1}$$

ものからなるとする. 前半の置換は $n!^m$ 個あり, 後半の置換は $m!$ 個あるので, $|G| = n!^m \cdot m!$ である.

発表用問題 6.3 (解答は 6.3)**.** G は $\mathfrak{S}_R$ の部分群なので特に部分集合であり, 従って $|G| \leq |\mathfrak{S}_R|$, つまり

$$n!^m \cdot m! \leq (mn)! \tag{6.3.2}$$

である. この不等式 (6.3.2) を直接示せ.

部分群 $G \subset \mathfrak{S}_R$ は R に作用するので, R の全ての部分集合からなる Boole 代数 B_R にも G は作用する. その軌道は次のように記述される.

補題 6.8. $G_{m,n}$ の B_R への作用における各軌道 $\mathfrak{o}$ には Young 図形 D が一つだけ含まれる. つまり $D \subset R$ であって, R を $m \times n$ の長方形としてみたときに, D は左に詰まっていて, 上から i 行目にある正方形の個数を λ_i とすると $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m$.

証明　$S \subseteq R$ を任意に取り, S の i 行目には α_i 個の正方形があるとする. $\pi \in G_{m,n}$ による置換 πS の i 行目には β_i 個の正方形があるとすると, $G_{m,n}$ の定義 (6.3.1) から, 数列 $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ は $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ の置換である. そこで α の置換であって単調減少であるもの, つまり分割を $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m$ とすると, λ は α から一意に決まる. 従って軌道 $G_{m,n}S$ に属する元で Young 図形であるものは, λ に対応する $D_\lambda \subseteq R$ しかない. つまり条件を満たす $G_{m,n}S$ の元は高々一つしか存在しない. あとは実際に存在することを言えば証明が終わるが, それには $\pi S = D_\lambda$ となる $\pi \in G_{m,n}$ を構成すればよい. それには, まず R の各行の置換であって S を左詰めにするものをとり, 続いて各行にある正方形の個数が行に関して単調減少になるように置換すれば, それで $\pi S = D_\lambda$ となる. □

後は次の定理を示せば系 6.6 が従う. 二つの半順序集合が同型であることの定義 (§4.1) を思い出しておいて欲しい.

定理 6.9. $R = R_{m,n}$ として, 商半順序集合 $B_R/G_{m,n}$ は $L(m,n)$ と同型である.

証明　補題 6.8 より $B_R/G_{m,n}$ の各元には一つだけ Young 図形 $D \subset R_{m,n}$ が含まれるから, それを対応させることで写像 $\varphi\colon B_R/G_{m,n} \to L(m,n)$ が得られる. 異なる二つの軌道は交わりを持たない

から, 対応する Young 図形も異なるので, 写像 φ は単射である. また全射であることは明らかなので, φ は全単射である. よって後は順序を保つことを示せばよい. つまり, $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}^*$ を異なる $G_{m,n}$ 軌道とし, $D_\lambda := \varphi(\mathfrak{o})$, $D_{\lambda^*} := \varphi(\mathfrak{o}^*)$ として, $L(m,n)$ において $\lambda \le \lambda^*$ であることと, $D \subseteq D^*$ となる $D \in \mathfrak{o}$ と $D^* \in \mathfrak{o}^*$ が存在することが同値であることを示せばよい.

$\lambda \le \lambda^*$ であれば $D_\lambda \subseteq D_{\lambda^*}$ なので, $D = D_\lambda$, $D^* = D_{\lambda^*}$ とすればよい. 逆に $D \subseteq D^*$ となるものが存在すると仮定しよう. D の各行にある正方形の個数を大きい順に $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_m$ と書き, D^* についても同様に λ_j^* と書く. D の各行は D^* に含まれるから, 各 $j = 1, 2, \ldots, m$ に対して, D^* には λ_j 個以上の正方形を含む行が j 以上ある. すると D^* の行にある正方形の個数であって j 番目に大きい λ_j^* は λ_j 以上, つまり $\lambda_j^* \ge \lambda_j$ となる. □

テキストには系 6.6 の応用 [S, 6.11 Theorem] とその変奏 [S, 6.14 Theorem, 6.15 Theorem] が説明されているが, この講義ノートでは省略する.

レポート問題

半順序集合の二元 x, y について, $x < y$ かつ $x < z < y$ となる z が存在しない時, y は x を被覆すると言い, $x \lessdot y$ と書くことを思い出そう (§4.1).

レポート問題 7 (テキスト [S, p.72, Exercises for Chapter 6, 2(a)], 解答 7)**.** $L(m,n)$ の元の対 (λ, μ) であって $\lambda \lessdot \mu$ となるものの数 $c(m,n)$ が次で与えられることを示せ.

$$c(m,n) = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!}.$$

7 群作用がある場合の数え上げ その 1 (6/18)

今回の内容はテキスト [S, Chapter 7] に基づく.

7.1 Burnside の補題と色付けの数え上げ

集合 X に対して $\mathfrak{S}_X$ でその置換群を表す. 群 G が集合 X に作用することと群準同型 $G \to \mathfrak{S}_X$ が存在することは同値であった (§5.1 参照). 特に任意の部分群 $G \subseteq \mathfrak{S}_X$ は X に作用する.

補題 7.2 (Burnside の補題, または Cauchy-Frobenius の補題)**.** Y を有限集合とし, $G \subseteq \mathfrak{S}_Y$ を部分群とする. 各 $\pi \in G$ に対して

$$\mathrm{Fix}(\pi) := \{y \in Y \mid \pi(y) = y\}$$

と定める. すると G 軌道全体がなす集合 Y/G の元の個数は

$$|Y/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)|. \tag{7.1.1}$$

例 7.3. $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ として $\mathfrak{S}_Y$ を 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ と同一視する. サイクル (巡回置換) の記号を用いて $\mathfrak{S}_4$ の二つの部分群 G, G' を

$$G := \{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}, \quad G' := \{e, (1, 2), (3, 4), (1, 2)(3, 4)\}$$

で定める. $\pi \in G$ と $y \in Y$ に対して $\pi.y \in Y$ で作用を書くと

$$e.1 = 1, \quad (1, 2)(3, 4).1 = 2, \quad (1, 3)(2, 4).1 = 3, \quad (1, 4)(2, 3).1 = 4$$

より $Y/G = \{Y\}$. 一方で (7.1.1) の右辺について,

$$\mathrm{Fix}(e) = Y, \quad \mathrm{Fix}\big((1, 2)(3, 4)\big) = \mathrm{Fix}\big((1, 3)(2, 4)\big) = \mathrm{Fix}\big((1, 4)(2, 3)\big) = \emptyset$$

より $\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)| = \frac{1}{4}(4 + 0 + 0 + 0) = 1$. 従って確かに G について (7.1.1) が成立する. 同様に G' の作用を調べると

$$e.1 = (3, 4).1 = 1, \quad (1, 2).1 = (1, 2)(3, 4).1 = 2, \quad e.3 = (1, 2).3 = 3, \quad (3, 4).3 = (1, 2)(3, 4).3 = 4$$

より $Y/G' = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. 一方で (7.1.1) の右辺について,

$$\mathrm{Fix}(e) = Y, \quad \mathrm{Fix}\big((1, 2)\big) = \{3, 4\}, \quad \mathrm{Fix}\big((3, 4)\big) = \{1, 2\}, \quad \mathrm{Fix}\big((1, 2)(3, 4)\big) = \emptyset$$

より $\frac{1}{|G'|} \sum_{\pi \in G'} |\mathrm{Fix}(\pi)| = \frac{1}{4}(4 + 2 + 2 + 0) = 2$. 従って G' についても (7.1.1) が成立する.

補題 7.2 の証明 $\pi \in G$ の $y \in Y$ への作用を $\pi.y \in Y$ と書く. 各 $y \in Y$ に対して $G_y := \{\pi \in G \mid \pi.y = y\}$ と定めると, 示したい等式 (7.1.1) の右辺は

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \sum_{y \in Y,\ \pi.y = y} 1 = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in Y} \sum_{\pi \in G,\ \pi.y = y} 1 = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in Y} |G_y|.$$

ここで (§1.1 の意味での) マルチセット $M_y := [\pi.g \mid g \in G]$ を考えると, 軌道 $G.y := \{\pi.y \mid \pi \in G\}$ の各元は M_y に $|M_y| \,/\, |G.y| = |G| \,/\, |G.y|$ 個ずつ現れる. 特に y は M_y に $|G| \,/\, |G.y|$ 回現れるから,

$$|G_y| = \frac{|G|}{|G.y|}.$$

従って

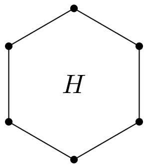
$$\frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)| = \frac{1}{|G|}\sum_{y \in Y} \frac{|G|}{|G.y|} = \sum_{y \in Y} \frac{1}{|G.y|}.$$

次に各軌道 $\mathfrak{o} \in Y/G$ について, $1/\,|\mathfrak{o}|$ が上の和に何回現れるかを考えると, $\mathfrak{o} = G.y \iff y \in \mathfrak{o}$ だから, $1/\,|\mathfrak{o}|$ は $|\mathfrak{o}|$ 回現れる. 従って

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)| = \sum_{\mathfrak{o} \in Y/G} \frac{|\mathfrak{o}|}{|\mathfrak{o}|} = |Y/G|\,.$$

□

例 7.4. 正六角形 H の 6 頂点に n 種類の色を使って色付けする. 頂点を巡回させて移りあう色付けを同一視すると, 何種類の色付けの仕方があるだろうか?



H を反時計回りに 60 度回転させることで得られる頂点の置換を π とすれば, 頂点の巡回全体のなす群 G は $G = \{\pi^i \mid i = 0, 1, \ldots, 5\}$ と書けて, 6 次巡回群 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ と同型である. G は同一視する前の色付け全体のなす集合 $\mathcal{C}_n$ に作用して, 求める場合の数は $|\mathcal{C}_n/G|$ である. そこで Burnside の補題 7.2 を使いたい. 各 $\pi^i \in G$ について $\mathrm{Fix}(\pi^i)$, つまり置換 π^i で動かない色付けの仕方を数えると

- $\pi^0 = e$ では全 $|\mathcal{C}_n| = n^6$ 通りが固定される.
- $\pi, \pi^5 = \pi^{-1}$ で動かないのは 6 頂点全てが同じ色で色付けされるものだから, 各々 n 通り.
- π^2, π^4 で動かないのは, 頂点を反時計回りに見ていった時に $ababab$ と二色で交互に色付けされている場合で, 各々 n^2 通り.
- π^3 で動かないのは, 同様の意味で $abcabc$ と三色で色付けされている場合で, n^3 通り.

以上の計算と Burnside の補題 7.2 から

$$|\mathcal{C}_n/G| = \frac{1}{6}(n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n). \tag{7.1.2}$$

発表用問題 7.1 (解答は 7.1)**.** 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, (7.1.2) の右辺が正整数であることを示せ.

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の任意の元 σ はサイクルの積で

$$\sigma = (i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_{l_1}^{(1)})(i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_{l_2}^{(2)}) \cdots (i_1^{(c)}, i_2^{(c)}, \ldots, i_{l_c}^{(c)}),$$
$$i_1^{(j)} < i_2^{(j)} < \cdots < i_{l_j}^{(j)}, \quad l_j \in \mathbb{Z}_{>0} \quad (j = 1, 2, \ldots, c), \quad l_1 + l_2 + \cdots + l_c = n$$

と書ける．書き方は複数あるが, $c \in \mathbb{Z}_{>0}$ は σ に対して一意である．この c を $c(\sigma)$ と書こう．

定理 7.5. X を有限集合, $G \subseteq \mathfrak{S}_X$ を部分群とする．X の各元を n 種類の色を使って色付けし, G の作用でうつりあう色付けは同一視すると, 色付けの場合の数 $N_G(n)$ は

$$N_G(n) = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} n^{c(\pi)}.$$

但し $c(\pi)$ は $\pi \in \mathfrak{S}_X = \mathfrak{S}_{|X|}$ とみなしてサイクルの積で表した時の項数.

証明 例 7.4 と同様に, X を n 種類の色を用いて色付けする場合の数を $\mathcal{C}_n$ と書く．色を番号付けしてその全体を $C := \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ と書けば, $\mathcal{C}_n$ の各元は写像 $f\colon X \to C$ と見なせる．G の X への作用 $G \times X \ni (\pi, x) \mapsto \pi.x \in X$ は,

$$(\pi.f)(x) := f(\pi^{-1}.x) \tag{7.1.3}$$

で X から C への写像全体のなす集合 $F := \{f\colon X \to C\}$ 上の作用を定める (問題 7.2)．求めたい $N_G(n)$ は $|F/G|$ である．そこで各 $\pi \in G$ に対して $\mathrm{Fix}(\pi) := \{f \in F \mid f = \pi.f\}$ とすれば, Burnside の補題 7.2 から $N_G(n) = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|\mathrm{Fix}(\pi)|$．従って各 $\pi \in G$ に対して $|\mathrm{Fix}(\pi)| = n^{c(\pi)}$ を示せばよい．以下 π を一つ取って固定する．

$f \in \mathrm{Fix}(\pi)$ ならば, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $f(\pi^k(x)) = f(x)$ である (問題 7.4)．しかし X の元であって $\pi^k(x)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と書けるものは, π をサイクルの積で $\pi = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{c(\pi)}$ と書いた時に, x と同じサイクルに現れるものに他ならない．従って $f \in \mathrm{Fix}(\pi)$ を定めることは, 各サイクル $\sigma_j = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{l_j}^{(j)})$ に現れる $x_k^{(j)} \in X$, $1 \leq k \leq l_j$ を全て同じ色で色付けすることと同値である．つまり $|\mathrm{Fix}(\pi)| = n^{c(\pi)}$. □

発表用問題 7.2 (解答は 7.2)**.** 群 G が集合 X に $(\pi, x) \mapsto \pi.x$, $\pi \in G$, $x \in X$ で作用しているとする．また Y を集合とし, $F := \{f\colon X \to Y\}$ を X から Y への写像全体のなす集合とする．この時, $\pi \in G$ と $f \in F$ に対して $\pi.f \in F$ を (7.1.3) で定めれば, G の F 上の作用が定まることを示せ.

発表用問題 7.3 (解答は 7.3)**.** 前問で (7.1.3) の代わりに $(\pi \cdot f)(x) := f(\pi.x)$ とするとどうなるか論じよ (作用を . と · で書き分けていることに注意).

発表用問題 7.4 (解答は 7.4)**.** 有限群 G が集合 F に作用していて, $f \in F$ は $\pi \in G$ の作用で不変, つまり $\pi.f = f$ だとする．この時, 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\pi^k.f = f$ であることを示せ.

7.2 数え上げの精密化

定理 7.5 では色付けの総数を数え上げたが, より細かい数え上げ問題を考えよう．前と同様に, 有限集合 X への部分群 $G \subset \mathfrak{S}_X$ の作用を考え, 色の (有限) 集合を $C = \{r_1, r_2, \dots\}$ とし[22), $f\colon X \to C$ で色付けを表す．$i_1, i_2, \dots \in \mathbb{N}$ に対して

$$\kappa(i_1, i_2, \dots) := \left|\left\{f\colon X \to C \mid |f^{-1}(r_j)| = i_j,\ \forall j = 1, 2, \dots\right\}/G\right| \tag{7.2.1}$$

22） 実は C が可算無限集合でも, 適切に無限変数の多項式を定義すれば, 定理 7.7 は成立します.

とする．つまり，これは各 $r_j \in C$ を i_j 回用いるような色付け f 達を，G で移りあうものは同一視して数え上げたものである．そして C の元 r_j 達を母函数の (可換な) 変数として用いて，

$$F_G(C) := \sum_{i_1, i_2, \ldots \in \mathbb{N}} \kappa(i_1, i_2, \ldots) r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots \tag{7.2.2}$$

と定める． この母函数の明示式を与えるのが，以下で説明する Pólya[23] の定理 7.7 である．

定理の結論に用いる記号を用意する．$n := |X|$ とする．$\pi \in \mathfrak{S}_X$ をサイクルの積で $\pi = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_l$ と表した時に長さ i のサイクルが c_i 個現れる場合，

$$c_i(\pi) := c_i, \quad \mathrm{type}(\pi) := (c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{7.2.3}$$

と書き，type(π) を π の**サイクルタイプ**と呼ぶ．例えば $n = 11$ の時に

$$\mathrm{type}\big((1,4,8)(2,7,11,5)(3)(6,10,9)\big) := (1,0,2,1,0,0,0,0,0,0,0).$$

問題 7.6 よりサイクルタイプは $\mathfrak{S}_n$ の共役類と一対一に対応する．

発表用問題 7.5 (解答は 7.5)**.** (7.2.3) について，任意の $\pi \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\sum_{i=1}^n i c_i = n$ となることを示せ．

発表用問題 7.6 (解答は 7.6)**.** 任意の二元 $\pi, \rho \in \mathfrak{S}_n$ について次の同値を示せ．

$$\pi \text{ と } \rho \text{ は共役} \iff \mathrm{type}(\pi) = \mathrm{type}(\rho).$$

この $\mathrm{type}(\pi) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ を用いて，可換な変数 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ の単項式 Z_π を

$$Z_\pi = Z_\pi(z_1, z_2, \ldots, z_n) := z_1^{c_1} z_2^{c_2} \cdots z_n^{c_n} \tag{7.2.4}$$

で定め，更に部分群 $G \subseteq \mathfrak{S}_X$ に対して有理数係数多項式 $Z_G \in \mathbb{Q}[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ を次で定める．

$$Z_G = Z_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) := \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} Z_\pi. \tag{7.2.5}$$

例 7.6. X が正方形の四頂点からなる集合で，G が X の回転からなる群 (4 次巡回群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) の場合，反時計回りに $X = \{1,2,3,4\}$ と番号づければ $G = \{e = (1)(2)(3)(4), (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2)\}$ だから

$$Z_G(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{4}(z_1^4 + z_2^2 + 2z_4).$$

G に (中心を通る直線に関する) 鏡映変換達を付け加えて得られる群 G' (位数 8 の二面体群[24] $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) については，$G \setminus G' = \{(1,2)(3,4), (1,3)(2)(4), (1,4)(2,3), (1)(3)(2,4)\}$ なので

$$Z_{G'}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{4}(z_1^4 + 2z_1^2 z_2 + 3z_2^2 + 2z_4).$$

23） ポーヤと読みます．
24） $\rtimes$ は半直積の記号．§7.3 を参照．

定理 7.7 (Pólya の定理 [P37]). 以上の記号のもと,

$$F_G(C) = Z_G\bigl(p_1[C], p_2[C], \ldots, p_n[C]\bigr), \quad p_k[C] := r_1^k + r_2^k + \cdots .$$

特に $Z_G\bigl(p_1[C], p_2[C], \ldots, p_n[C]\bigr)$ は $r_1, r_2, \ldots$ 達の整数係数の多項式になることに注意する.

例 7.8. 例 7.6 の前半, つまり X は正方形の頂点集合で G が 4 次巡回群の場合を考える. 色は全部で 4 色として, $C = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ とすると, Pólya の定理 7.7 から

$$\begin{aligned} F_G(r_1, r_2, r_3, r_4) &= \frac{1}{4}\bigl((r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^4 + (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)^2 + 2(r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 + r_4^4)\bigr) \\ &= (r_1^4 + \cdots) + (r_1^3 r_2 + \cdots) + 2(r_1^2 r_2^2 + \cdots) + 3(r_1^2 r_2 r_3 + \cdots) + 6 r_1 r_2 r_3 r_4. \end{aligned}$$

但し $\cdots$ は同じ形の冪を省略したものである. 例えば二番目の項を正確に書くと

$$r_1^3 r_2 + r_1^3 r_3 + r_1^3 r_4 + r_2^3 r_1 + r_2^3 r_3 + r_2^3 r_4 + r_3^3 r_1 + r_3^3 r_2 + r_3^3 r_4 + r_4^3 r_1 + r_4^3 r_2 + r_4^3 r_3 = \sum_{1 \le i \ne j \le 4} r_i^3 r_j^1.$$

例 7.6 の後半, つまり二面体群 G' の場合は

$$\begin{aligned} F_{G'}(r_1, r_2, r_3, r_4) &= \frac{1}{8}\bigl((r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^4 + 2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^2 (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) \\ &\qquad + 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)^2 + 2(r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 + r_4^4)\bigr) \\ &= (r_1^4 + \cdots) + (r_1^3 r_2 + \cdots) + 2(r_1^2 r_2^2 + \cdots) + 2(r_1^2 r_2 r_3 + \cdots) + 3 r_1 r_2 r_3 r_4. \end{aligned}$$

定理 7.7 の証明は次回行う.

7.3 群の半直積

ここでは例 7.6 で現れた群の半直積を扱う.

定義. H と N を群とし, $\mathrm{Aut}(N)$ を群同型 $N \to N$ 全体がなす群 (N **の自己同型群**) とし, また $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ を群準同型とする. $h \in H$ に対し $\varphi_h := \varphi(h) \in \mathrm{Aut}(N)$ と書く. この時, 集合としての直積 $H \times N$ は,

$$(h_1, n_1) * (h_2, n_2) := (h_1 h_2, n_1 \varphi_{h_1}(n_2)) \quad (h_1, h_2 \in H,\ n_1, n_2 \in N)$$

で定まる写像 $*\colon (H \times N) \times (H \times N) \to H \times N$ によって群になる. この群 $(H \times N, *)$ を H と N の (準同型 φ による) **半直積** (semi-direct product) と呼び, $H \ltimes_\varphi N$ あるいは単に $H \ltimes N$ と書く.

発表用問題 7.7 (解答は 7.7). 上の定義で $H \ltimes_\varphi N := (H \times N, *)$ が実際に群であることを示せ.

発表用問題 7.8 (解答は 7.8). H, N を群とする. $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ を自明な群準同型, 即ち任意の $h \in H$ に対し $\varphi(h) = \mathrm{id}_N$ とする. この時, 半直積 $H \ltimes_\varphi N$ は直積群 $H \times N$ と同型であることを示せ.

発表用問題 7.9 (解答は 7.9). H と N を群とし, $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ を群準同型とする. 半直積 $G := H \ltimes_\varphi N$ が以下の性質を満たすことを示せ.

(1) $H' := \{(h, e_N) \mid h \in H\}$ は H と同型な G の部分群. 但し $e_N \in N$ は単位元.

(2) $N' := \{(e_H, n) \mid n \in N\}$ は N と同型な G の正規部分群. 但し $e_H \in H$ は単位元.

(3) $G = N'H'$ かつ $N' \cap H' = \{e_G\}$. 但し $e_G \in G$ は単位元.

注意. 問題 7.9 が主張するように, 半直積 $H \ltimes_\varphi N$ は H, N と同型な部分群を含む. 上の問題では区別のため H', N' と記号を変えたが, 通常は同じ記号 H, N を用いて, 「$H \subset H \ltimes_\varphi N$ は部分群, $N \triangleleft H \ltimes_\varphi N$」などと書く. レポート問題 8 ではこのように濫用した記号を用いる.

レポート問題

レポート問題 8 (解答 91)**.** 以下の二つの性質をともに満たす群 G のうち, 最小位数のものを求めよ.

(1) $G = H \ltimes_\varphi N$ と半直積で書けて, 更に H, N は G の自明な部分群ではない.

(2) G は直積ではない.

7 群作用がある場合の数え上げ その 2 (7/02)

今回の内容はテキスト [S, Chapter 7, p.84–] に基づく.

7.4 Pólya の定理の証明

Pólya の定理 7.7 の証明 $n := |X|$ とし, $I := (i_1, i_2, \dots)$, $i_j \in \mathbb{N}$, $i_1 + i_2 + \cdots = n$ を一つ取って固定する. この I に対し

$$\mathcal{C}_I := \left\{ f\colon X \to C \mid |f^{-1}(r_j)| = i_j, \forall j = 1, 2, \dots \right\}$$

とすれば, G の $\{f\colon X \to C\}$ 上の作用は $\mathcal{C}_I$ を保ち, (7.2.1) より $\kappa(i_1, i_2, \dots) = |\mathcal{C}_I/G|$. 各 $\pi \in G$ に対して $\mathrm{Fix}(\pi_I) := \{f \in \mathcal{C}_I \mid \pi.f = f\}$ とすると, Burnside の補題 7.2 から $|\mathcal{C}_I/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|\mathrm{Fix}(\pi_I)|$. そこで $|\mathrm{Fix}(\pi_I)|$ を計算しよう. $f\colon X \to C$ が $f \in \mathrm{Fix}(\pi_I)$ となる為には次の二条件が必要十分.

(a)π をサイクルの積で $\pi = \sigma_1\sigma_2\cdots$ と表した時に, 各サイクル $\sigma_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{l_k}^{(k)})$ に現れる $x_l^{(k)} \in X$ 達は同一の色で色付けられる, つまり $f(x_1^{(k)}) = f(x_2^{(k)}) = \cdots = f(x_{l_k}^{(k)})$.

(b)各 $j = 1, 2, \dots$ に対して $\left|f^{-1}(r_j)\right| = i_j$.

ここで (7.2.3) の $c_j(\pi)$ を用いて

$$H_\pi := \prod_{j=1}^{n} p_j[C]^{c_j(\pi)} = \prod_{j=1}^{n}(r_1^j + r_2^j + \cdots)^{c_j(\pi)} \tag{7.4.1}$$

を考える. この多項式を展開した時の単項式 $r_1^{j_1}r_2^{j_2}\cdots$ の係数を求めよう. 項 $r_1^j + r_2^j + \cdots$ から r_k^j を選ぶことは長さ j のあるサイクルに属する元を全て $r_k \in C$ で色付けすることに相当する. 長さ j のサイクルは全部で $c_j(\pi)$ だけ存在するから, 全ての項について各々一つ r_k^j を選ぶことは, X の色付けであってどのサイクルに属する頂点も同じ色で色付けする方法と一対一に対応する. つまり上記の条件 (a) が成立している. そして単項式 $r_1^{j_1}r_2^{j_2}\cdots$ の係数は $r_k \in C$ を j_k 回使う色付けの場合の数である. 特に $r_1^{i_1}r_2^{i_2}\cdots$ の係数は条件 (b) も満たす場合の数だから, $|\mathrm{Fix}(\pi_I)|$ と等しい. 以上より

$$H_\pi = \sum_I |\mathrm{Fix}(\pi_I)|\, r_1^{i_1}r_2^{i_2}\cdots.$$

あとは母函数の定義 (7.2.2) と (7.2.4) 及び (7.2.5) を思い出せば

$$\begin{aligned} F_G(C) &= \sum_I |\mathcal{C}_I/G|\, r_1^{i_1}r_2^{i_2}\cdots = \sum_I \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|\mathrm{Fix}(\pi_I)|\, r_1^{i_1}r_2^{i_2}\cdots = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\sum_I |\mathrm{Fix}(\pi_I)|\, r_1^{i_1}r_2^{i_2}\cdots \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} H_\pi = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} Z_\pi(p_1[C], p_2[C], \dots) = Z_G(p_1[C], p_2[C], \dots). \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

□

テキストにはこの後の [S, 7.9 Example, 7.10 Theorem] でネックレス (necklace, 円順列のこと) の色付けの場合の数を, そして [S, (7.6)] で dihedral necklace (数珠順列のこと) の色付けの場合の数を数え上げしているが, この講義ノートでは省略する.

7.5 対称群の共役類の個数

Pólya の定理 7.7 で $G = \mathfrak{S}_X$ の場合を考えよう．$l := |X|$ と書くと $G \simeq \mathfrak{S}_l$ で，この場合の $F_{\mathfrak{S}_l}(C)$ は区別しない l 個のものを色 C を使って色付ける場合の数である．定理の証明中の (7.4.1) と (7.4.2) から，$F_{\mathfrak{S}_l}$ は次で与えられる．

$$F_{\mathfrak{S}_l}(C) = \frac{1}{l!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_l} H_\pi = \frac{1}{l!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_l}\prod_{j=1}^{l}(r_1^j + r_2^j + \cdots)^{c_j(\pi)}. \tag{7.5.1}$$

例 7.11. (7.5.1) を $l = 1, 2, 3, 4$ の場合に書き出すと，$p_k := p_k[C] = r_1^k + r_2^k + \cdots$ として，

$$\begin{aligned}
F_{\mathfrak{S}_1}(C) &= H_e = p_1,\\
F_{\mathfrak{S}_2}(C) &= \frac{1}{2}(H_e + H_{(1,2)}) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2),\\
F_{\mathfrak{S}_3}(C) &= \frac{1}{6}(H_e + H_{(1,2)} + H_{(1,3)} + H_{(2,3)} + H_{(1,2,3)} + H_{(1,3,2)}) = \frac{1}{6}(p_1^3 + 3p_1p_2 + 2p_3),\\
F_{\mathfrak{S}_4}(C) &= \frac{1}{24}\Bigl(H_e + \sum_{1\le i<j\le 4} H_{(i,j)} + H_{(1,2)(3,4)} + H_{(1,3)(2,4)} + H_{(1,4)(2,3)}\\
&\qquad\qquad + \sum_{1\le i<j<k\le 4}(H_{(i,j,k)} + H_{(i,k,j)}) + \sum_{2\le i\ne j\ne k\le 4} H_{(1,i,j,k)}\Bigr)\\
&= \frac{1}{24}(p_1^4 + 6p_1^2p_2 + 3p_2^2 + 8p_1p_3 + 6p_4).
\end{aligned}$$

一方，$F_{\mathfrak{S}_l}(C)$ が区別しない l 個のものを色 C を使って色付ける場合の数であることから，直接

$$F_{\mathfrak{S}_l}(C) = \sum_{i_1+i_2+\cdots=l} r_1^{i_1} r_2^{i_2}\cdots \tag{7.5.2}$$

とも計算できる．実際に上記の $F_{\mathfrak{S}_1}(C), \ldots, F_{\mathfrak{S}_4}(C)$ に $p_k = r_1^k + r_2^k + \cdots$ を代入すると，分母の $l!$ がキャンセルして (7.5.2) が成立することが分かる．後の為に $F_{\mathfrak{S}_l}(C)$ の母函数を与えておこう．

$$\sum_{l\ge 0} F_{\mathfrak{S}_l}(C)x^l = \frac{1}{(1-r_1x)(1-r_2x)\cdots}. \tag{7.5.3}$$

但し右辺は x の冪級数として $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ のように展開したものとみなす．

発表用問題 7.10 (解答は 7.10)**.** (7.5.2) を使って (7.5.3) を示せ．

(7.5.1) と (7.5.2) から次の等式が得られる．

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_l}\prod_{j=1}^{l}(r_1^j + r_2^j + \cdots)^{c_j(\pi)} = l!\sum_{i_1+i_2+\cdots=l} r_1^{i_1} r_2^{i_2}\cdots.$$

この等式の意味を考えてみよう．数列 $c = (c_1, c_2, \ldots)$, $c_i \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{l} c_j = l$ が与えられたとして，両辺の係数について

$$(r_1^{c_1} r_2^{c_2}\cdots \text{ の係数}) = |\{\pi \in \mathfrak{S}_l \mid \mathrm{type}(\pi) = c\}|$$

となることに注意する．但し $\mathrm{type}(\pi)$ は π のサイクルタイプ (7.2.3)．問題 7.6 よりサイクルタイプは対称群 $\mathfrak{S}_l$ の共役類と同一視できるから，

$$(r_1^{c_1} r_2^{c_2} \cdots \text{ の係数}) = |X_c|, \quad X_c := (\text{サイクルタイプ } c \text{ に対応する } \mathfrak{S}_l \text{ の共役類})$$

となる．この数の明示式が以下の定理 7.12 で与えられる．

定理 7.12. 正整数 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定し，数列 $c = (c_1, c_2, \dots)$, $c_j \in \mathbb{N}$, $\sum_{j \geq 1} j c_j = l$ が一つ与えられたとする．この時，サイクルタイプが c であるような $\mathfrak{S}_l$ の元の個数，つまり $|X_c|$ は

$$|X_c| = \frac{l!}{1^{c_1} c_1! 2^{c_2} c_2! \cdots}.$$

証明　写像 $f : \mathfrak{S}_l \to X_c$ を次のように構成する．$\mathfrak{S}_l$ の元 $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & l \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_l \end{smallmatrix}\right)$ に対して $f(\sigma) \in X_c \subset \mathfrak{S}_l$ を，サイクルの積で

$$\begin{aligned} f(\sigma) := (a_1)(a_2)\cdots(a_{c_1}) \cdot (a_{c_1+1}, a_{c_1+2})(a_{c_1+3}, a_{c_1+4}) \cdots (a_{c_1+2c_2-1}, a_{c_1+2c_2}) \\ \cdot (a_{c_1+2c_2+1}, a_{c_1+2c_2+2}, a_{c_1+2c_2+3})(a_{c_1+2c_2+4}, a_{c_1+2c_2+5}, a_{c_1+2c_2+6}) \cdots \\ (a_{c_1+2c_2+3c_3-2}, a_{c_1+2c_2+3c_3-1}, a_{c_1+2c_2+3c_3}) \cdots \end{aligned}$$

と定める．問題 7.5 より $\sum_{i \geq 1} i c_i = l$ なので，確かに $f(\sigma) \in X_c$ となることに注意しておく．ここで $\pi \in X_c$ を任意に取って，$\left|f^{-1}(\pi)\right|$ を求めよう．長さ i のサイクルは

$$(b_1, b_2, \dots, b_i) = (b_2, b_3, \dots, b_i, b_1) = \cdots = (b_i, b_1, \dots, b_{i-1})$$

と i 通りに書けて，また c_i 個の長さ i のサイクル達の並べ方が $c_i!$ 個あるから

$$\left|f^{-1}(\pi)\right| = 1^{c_1} c_1! \cdot 2^{c_2} c_2! \cdots . \tag{7.5.4}$$

この式 (7.5.4) から $\left|f^{-1}(\pi)\right|$ は π の取り方によらないことも分かる．すると

$$|X_c| = \frac{|\mathfrak{S}_l|}{(7.5.4)} = \frac{l!}{1^{c_1} c_1! 2^{c_2} c_2! \cdots}$$

となって，結論が得られる．□

最後に (7.2.5) の多項式 $Z_{\mathfrak{S}_l}$ の母函数を求めよう：

$$Z_{\mathfrak{S}_l}(z_1, z_2, \dots) = \frac{1}{|\mathfrak{S}_l|} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_l} z_1^{c_1(\pi)} z_2^{c_2(\pi)} \cdots .$$

定理 7.13.

$$\sum_{l \geq 0} Z_{\mathfrak{S}_l}(z_1, z_2, \dots) x^l = \exp\Bigl(z_1 x + \frac{1}{2} z_2 x^2 + \frac{1}{3} z_3 x^3 + \cdots\Bigr).$$

証明　テキストの証明 [S, 7.13 Theorem] とは別の方法で示す．(7.5.3) と Pólya の定理 7.7 から，$p_k = p_k[C] = r_1^k + r_2^k + \cdots$ として

$$\sum_{l \geq 0} Z_G(p_1, p_2, \dots) x^l = \prod_{j \geq 1} \frac{1}{1 - r_j x}.$$

ここで下の問題 7.11 から冪級数の等式

$$\frac{1}{1-x} = \exp\Bigl(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n\Bigr) \tag{7.5.5}$$

が成立するので,

$$\prod_{j\geq 1} \frac{1}{1-r_j x} = \prod_{i\geq 1} \exp\Bigl(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(r_i x)^n\Bigr) = \exp\Bigl(\sum_{i\geq 1}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(r_i x)^n\Bigr) = \exp\Bigl(\sum_{n\geq 1}\sum_{i\geq 1} \frac{1}{n}(r_i x)^n\Bigr)$$
$$= \exp\Bigl(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{i\geq 1} r_i^n x^n\Bigr) = \exp\Bigl(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} p_n x^n\Bigr).$$

$p_1, p_2, \ldots$ を $z_1, z_2, \ldots$ に置き換えて[25], 結論が得られる. □

発表用問題 7.11 (解答は 7.11)**.** $f(x) := \frac{1}{1-x}$ の対数微分 $\frac{d}{dx} \log f(x)$ を考えることで (7.5.5) を導け.

テキストにはこの後の [S, 7.9 Example, 7.10 Theorem] でネックレス (necklace, 円順列のこと) の色付けの場合の数を, そして [S, (7.6)] で dihedral necklace (数珠順列のこと) の色付けの場合の数を数え上げしているが, この講義ノートでは省略する.

レポート問題

レポート問題 9 (解答: 92 ページ)**.** テキスト [S, p.92, Corollary 7.15] にある次の主張を, Pólya の定理 7.7 から導け.

有限集合 X と部分群 $G \subseteq \mathfrak{S}_X$ を考える. X の Boole 代数 B_X に G が作用し, その軌道の集合 B_X/G は次数付きの半順序集合の構造を持つ (§5.3). この商半順序集合 B_X/G の階数母函数 (§4.1) の元の個数の母函数は次で与えられる.

$$\sum_{i\geq 0} |(B_X/G)_i|\, q^i = Z_G(1+q, 1+q^2, 1+q^3, \ldots)$$

(テキスト p.91 後半の Quotients of Boolean Algebras に導出が書いてあるので, それを理解してレポートにまとめて下さい.)

25) 正確に言うと, ここで $p_j = r_1^k + r_2^k + \cdots$ 達の代数独立性を用いています.

8 Young 盤 (7/09)

今回の内容はテキスト [S, Chapter 8] に基づく.

8.1 Young 盤

今回の目標は Young 束の Hasse 図式上の歩行の数え上げだが, それに用いる **Young 盤**を先に導入しよう.

定義. λ を $n \in \mathbb{N}$ の分割とする. 枠 λ の**標準 Young 盤** (standard Young tableau) とは, λ の Young 図形の各正方形に $1, 2, \ldots, n$ を一つずつ書き込んだもので, 各行右に, 及び各列下に見ていくと単調増加なもののことである.

例. 枠 $(2, 2, 1)$ の標準 Young 盤は以下の五つ.

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}
$$

定義. 分割 λ に対して, 枠 λ の標準 Young 盤の個数を f^λ と書く.

上の例から $f^{(2,2,1)} = 5$ である. 実は一般の分割 λ に対する f^λ の組み合わせ論的公式がある.

定理 8.1 (Frame-Robinson-Thrall [FRT54], フック長公式 (hook length formula))**.** λ が $n \in \mathbb{N}$ の分割の時,

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{s \in \lambda} h(s)}.$$

但し $s \in \lambda$ は λ の Young 図形の正方形を意味する. また $h(s)$ は s の**フック長** (hook length) と呼ばれる量で, 次で定義される.

$$
\begin{aligned}
h(s) := 1 &+ (s \text{ と同じ行にあって } s \text{ より右にある正方形の数}) \\
&+ (s \text{ と同じ列にあって } s \text{ より下にある正方形の数}).
\end{aligned}
$$

例. 上記の $\lambda = (2, 2, 1)$ の場合, 各 $s \in \lambda$ のフック長 $h(s)$ を書き込むと下図のようになり, フック長公式を使って計算すると

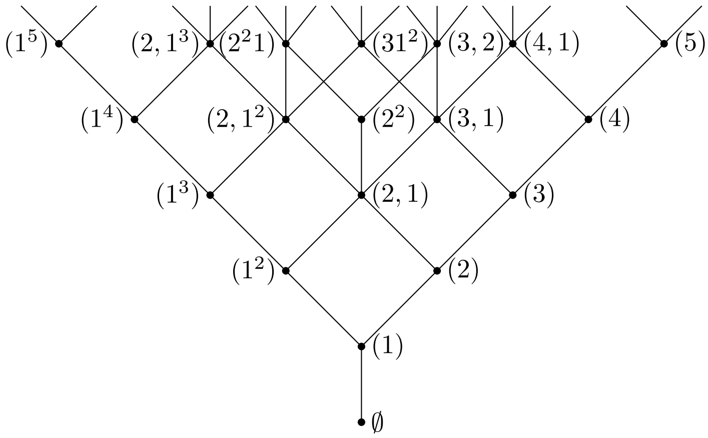
$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 2 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}
\qquad\qquad
\frac{5!}{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1} = 5.
$$

定理 8.1 の証明についてはテキスト [S, p.124 Notes for Chapter 8] を参照のこと. 日本語の教科書 [岡 06, 定理 10.7] には対称群の表現論を用いた証明が載っている.

発表用問題 8.1 (解答は 8.1)**.** 一行 Young 図形に対応した分割 (n) 及び一列 Young 図形に対応した分割 (1^n) について, $f^{(n)}$ と $f^{(1^n)}$ を求めよ.

8.2 Young 束の Hasse 歩行

Young 束 Y は次数付き半順序集合だが, 無限集合である. 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して i 番目のレベル Y_i は i の分割に対応する Young 図形からなる. Y の Hasse 図を途中まで Y_5 まで書くと以下のようになる.



半順序集合 P の Hasse 図上の歩行を P の **Hasse 歩行**と呼ぼう. Young 束 Y の Hasse 図は単純グラフ (ループも重複辺もない) であり, 従って Y の Hasse 歩行は分割の列 $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^l$ と同一視できる. 各 $i = 0, 1, \ldots, n-1$ について

(1) $\left|\lambda^i\right| = \left|\lambda^{i+1}\right| - 1$ の場合 U

(2) $\left|\lambda^i\right| = \left|\lambda^{i+1}\right| + 1$ の場合 D

と書くと, 長さ n の歩行 W に対して U と D が並んだ長さ n の**ワード** (word) ができる. 各遷移 $\lambda^i \to \lambda^{i+1}$ に対して, 上記の (1), (2) に応じて $A_i = U$ または D として,

$$A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1$$

と並べたものを, 考えている歩行の**型** (type) と呼ぶ.

例. $W = \emptyset, (1), (2), (1), (1^2), (1^3), (2, 1^2), (2^2, 1), (2^2), (2, 1), (3, 1), (4, 1)$ の型は

$$UUDDUUUDUU = U^2 D^2 U^4 D U^2.$$

以下 $\lambda^0 = \emptyset$ の歩行, つまり始点が空数列の歩行のみを考える. この場合の数え上げは Young 盤を使うとできる.

定義. $w = A_n A_{n-1} \cdots A_1$ を U 及び D からなる長さ n のワードとし, また λ を n の分割とする. 空数列 $\emptyset$ を始点とし, 終点を λ とする Young 束 Y の Hasse 歩行で型が w であるものの数を次の記号であらわす.

$$\alpha(w, \lambda). \tag{8.2.1}$$

発表用問題 8.2 (解答は 8.2)**.** 次の二つの等式を示せ.

$$\alpha(U^n,\lambda)=f^\lambda,\quad \alpha(D^nU^n,\emptyset)=\sum_{\substack{\lambda:\text{ 分割}\\|\lambda|=n}}(f^\lambda)^2. \tag{8.2.2}$$

まず $\alpha(w,\lambda)\neq 0$ となるための条件を求めよう.

補題 8.2. λ を $n\in\mathbb{N}$ の分割とし, また $w=D^{s_k}U^{r_k}\cdots D^{s_2}U^{r_2}D^{s_1}U^{r_1}$, $r_i,s_i\in\mathbb{N}$ とする. $\emptyset$ から λ への型 w の歩行が存在する為の必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{k}(r_i-s_i)=n,\quad \sum_{i=1}^{j}(r_i-s_i)\geq 0\quad (1\leq\forall j\leq k).$$

証明　必要なこと: U は分割のサイズを 1 増やし, D は 1 減らす. 最終的にサイズは $|\lambda|-|\emptyset|=n$ 増えるから, U の数と D の数の差は n. これから前半が従う. また各 $j=1,2,\ldots,k$ について, ワード $D^{s_j}U^{r_j}\cdots D^{s_2}U^{r_2}D^{s_1}U^{r_1}$ によって $\emptyset$ からある分割 λ^j に至る歩行が定まるが, 前半の議論から $\sum_{i=1}^{j}(r_i-s_i)=\left|\lambda^j\right|\geq 0$. 十分条件であることは問題 8.3 にする. □

発表用問題 8.3 (解答は 8.3)**.** 補題 8.2 について, 十分条件の部分を示せ.

定義. 補題 8.2 の条件を満たすワード w を**有効 λ ワード** (valid λ-word) と呼ぶ.

$\alpha(w,\lambda)$ の組み合わせ論的明示式は以下の通り.

定理 8.4. λ を $n\in\mathbb{N}$ の分割とし, $w=A_nA_{n-1}\cdots A_1$ を有効 λ ワードとする. $S_w:=\{i=1,2,\ldots,n\mid A_i=D\}$ とし, 各 $i\in S_w$ に対して

$$a_i:=A_i\text{ の右側にある }D\text{ の数},\quad b_i:=A_i\text{ の右側にある }U\text{ の数}$$

とする. この時

$$\alpha(w,\lambda)=f^\lambda\prod_{i\in S_w}(b_i-a_i).$$

例. 定理 8.4 で $w=U^n$ とすると $S_{U^n}=\emptyset$ だから $f^\lambda\prod_{i\in S_{U^n}}(b_i-a_i)=f^\lambda$. よって問題 8.2 前半の $\alpha(U^n,\lambda)=f^\lambda$ が従う.

問題 8.2 の $\alpha(D^nU^n,\emptyset)=\sum_{|\lambda|=n}(f^\lambda)^2$ と定理 8.4 から次の等式が得られる.

系 8.5. 任意の $n\in\mathbb{N}$ について

$$\sum_{\substack{\lambda:\text{ 分割}\\|\lambda|=n}}(f^\lambda)^2=n!.$$

発表用問題 8.4 (解答は 8.4)**.** 系 8.5 を示せ.

8.3　定理 8.4 の証明

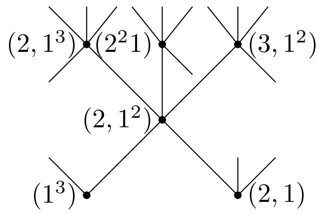
以前, Sperner の定理 (系 4.8) を線形代数的に証明したが, それと類似の議論を展開する. Young 束 Y のレベル Y_j を基底とする実線形空間を $\mathbb{R}Y_j$ と書く. 二つの線形写像を次のように定める.

$$U_i\colon \mathbb{R}Y_i\longrightarrow\mathbb{R}Y_{i+1},\quad U_i(\lambda):=\sum_{|\mu|=i+1,\,\lambda<\mu}\mu,$$

$$D_i\colon \mathbb{R}Y_i \longrightarrow \mathbb{R}Y_{i-1}, \quad D_i(\lambda) := \sum_{|\nu|=i-1,\, \nu<\lambda} \nu.$$

例. $\lambda = (2, 1^2)$ に U_4 と D_4 を適用すると

$$U_4(2,1^2) = (2,1^3) + (2^2,1) + (3,1^2), \quad D_4(2,1^2) = (1^3) + (2,1). \tag{8.3.1}$$



発表用問題 8.5 (解答は 8.5)**.** 非負整数 $i \in \mathbb{N}$ の分割 λ が r 個の異なるパート (§6.1 参照) を持つ時, つまり $\lambda = (l_1^{m_1}, \ldots, l_r^{m_r})$, $l_1 > \cdots > l_r$ と書ける時, $U_i(\lambda)$ は $r+1$ 項の和であり, また $D_i(\lambda)$ は r 項の和であることを示せ.

補題 8.3. 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i = \mathrm{id}_{\mathbb{R}Y_i}.$$

証明はレポート問題 10 にする.

線形写像 $U, D : \mathbb{R}Y \to \mathbb{R}Y$ を, それぞれ U_i, D_i 達の直和で定義する.

$$U := \oplus_{i\geq 0} U_i, \quad D := \oplus_{i\geq 1} D_i. \tag{8.3.2}$$

つまり, $\mathbb{R}Y$ の元 $y = \sum_{i\geq 0} c_i\lambda^i$, $c_i \in \mathbb{R}$, $\lambda^i \in Y_i$ に対して $U(y) := \sum_{i\geq 0} c_i U_i(\lambda^i)$ と定義する. 補題 8.3 から次が成立する.

$$DU - UD = \mathrm{id}_{\mathbb{R}Y}. \tag{8.3.3}$$

これを繰り返し使うと (厳密には帰納法で), 任意の $i \in \mathbb{N}$ について次が成立する.

$$DU^i - U^iD = iU^{i-1}. \tag{8.3.4}$$

例. $\lambda = (2, 1^2)$ とすると, (8.3.1) 及び

$$D(2,1^3) = (1^4) + (2,1^2), \quad D(2^2,1) = (2,1^2) + (2^2), \quad D(3,1^2) = (2,1^2) + (3,1),$$
$$U(1^3) = (1^4) + (2,1^2), \quad U(2,1) = (2,1^2) + (2^2) + (3,1)$$

から次のように補題 8.3 及び (8.3.3) が確認できる.

$$(DU - UD)(2,1^2) = \big(D(2,1^3) + D(2^2,1) + D(3,1^2)\big) - \big(U(1^3) + U(2,1)\big) = (2,1^2).$$

では定理 8.4 を証明しよう.

定理 8.4 の証明　与えられているワード $w = A_n A_{n-1} \cdots A_1$, $A_i \in \{U, D\}$ に対して, A_i を (8.3.2) の線形写像 U または D で置き換えて得られる線形写像 $\mathbb{R}Y \to \mathbb{R}Y$ を同じ記号 w で表す. (8.3.3) を使うと DU を $UD + \mathrm{id}$ に書き直せる. これを繰り返すと, 線形写像 $w\colon \mathbb{R}Y \to \mathbb{R}Y$ は

$$w = \sum_{i-j=m} r_{i,j}(w) U^i D^j, \quad r_{i,j}(w) \in \mathbb{Z} \tag{8.3.5}$$

の形に書き直せる. 但し

$$m := (\text{ワード } w \text{ 中の } U \text{ の数}) - (\text{ワード } w \text{ 中の } D \text{ の数})$$

であり, $i < 0$ または $j < 0$ なら $r_{i,j}(w) = 0$ とする. 係数 $r_{i,j}(w)$ は書き直しの順番によらず, ワード w から一意に定まることが示せる (テキスト [S, p.108 (8.4)] 周辺を参照).

(8.3.5) に左から U を合成すると $Uw = \sum_{i-j=n} r_{i,j}(w) U^{i+1} D^j$ となるから, $r_{i,j}(w)$ の一意性より

$$r_{i,j}(Uw) = r_{i-1,j}(w). \tag{8.3.6}$$

一方, (8.3.5) に左から D を合成して (8.3.4) を用いると

$$Dw = \sum_{i-j=m} r_{i,j}(w) DU^i D^j = \sum_{i-j=m} r_{i,j}(w)(U^i D^{j+1} + iU^{i-1} D^j)$$

となるから, $r_{i,j}(w)$ の一意性より

$$r_{i,j}(Dw) = r_{i,j-1}(w) + (i+1) r_{i+1,j}(w). \tag{8.3.7}$$

こうして得られた (8.3.6) と (8.3.7) で $j = 0$ とすると

$$r_{i,0}(Uw) = r_{i-1,0}(w), \quad r_{i,0}(Dw) = (i+1) r_{i+1,0}(w). \tag{8.3.8}$$

これを繰り返し使うと, 定理 8.4 主張中の S_w 及び a_i, b_i を用いて次の等式が示せる (問題 8.6).

$$r_{n,0}(w) = \prod_{i \in S_w} (b_i - a_i). \tag{8.3.9}$$

さて, (8.3.5) の線形写像 $w\colon \mathbb{R}Y \to \mathbb{R}Y$ で $\emptyset$ を写そう. $j \in \mathbb{Z}_{>0}$ なら $D^j(\emptyset) = 0$ だから

$$w(\emptyset) = r_{n,0}(w) U^n(\emptyset) \in \mathbb{R}Y.$$

ここで $w(\emptyset)$ を展開した時の λ の係数は, (8.2.1) で定義した $\alpha(w, \lambda)$. 同様に $U^n(\emptyset)$ の展開における λ の係数は $\alpha(U^n, \lambda)$. 従って上の等式から $\alpha(w, \lambda) = r_{n,0}(w) \alpha(U^n, \lambda)$. すると (8.2.2) 前半から

$$\alpha(w, \lambda) = r_{n,0}(w) f^\lambda.$$

これと (8.3.9) から定理 8.4 が従う. □

発表用問題 8.6 (解答は 8.6)**.** (8.3.8) を用いて (8.3.9) を示せ.

レポート問題

レポート問題 10 (解答: 92 ページ)**.** 補題 8.3 を証明せよ.

(テキスト [S, 8.3 Lemma, Proof] を理解して, レポートにまとめて下さい.)

12 可換環と組み合わせ論 その 1 (7/16)

今回の内容はテキスト [S, §12.1] に基づいて単体的複体 (simplicial complex) を扱う．今回からは集合 S の濃度を $\#S$ と表す．また，テキストに合わせて正整数の集合を次のように表す．

$$\mathbb{P} := \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}_{>0}.$$

12.1 単体的複体

定義. 有限集合 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ を**頂点集合とする単体的複体** (simplicial complex on vertex set V) とは，V の部分集合からなる集合 Δ であって次の二条件を満たすもののことである．

(i) 各 $i = 1, \ldots, n$ に対して $\{x_i\} \in \Delta$.

(ii) $F \in \Delta$ かつ $G \subseteq F$ ならば $G \in \Delta$.

Δ の各元 F を**面** (face) と呼ぶ．また包含関係に関する Δ の極大元，つまり他の面に含まれない面，のことを**ファセット** (facet) と呼ぶ．そして面 F の次元を $\dim F := (\#F) - 1$ で定義し，

$$\dim \Delta := \max\{\dim F \mid F \in \Delta\} \tag{12.1.1}$$

を**単体的複体 Δ の次元**と呼ぶ．

これ以降 $\Delta \neq \emptyset$，つまり面が一つはあるものと仮定する．

定義. 有限集合を元とする有限集合 Γ に対し，$\langle \Gamma \rangle$ を Γ の各元を含む最小の単体的複体とする．

$$\langle \Gamma \rangle := \{F \mid \text{ある } G \in \Gamma \text{ が存在して } F \subseteq G\}.$$

例. 有限集合を $123 = \{1, 2, 3\}$ 等と略記する．$\Gamma = \{123, 14, 24\}$ の場合，

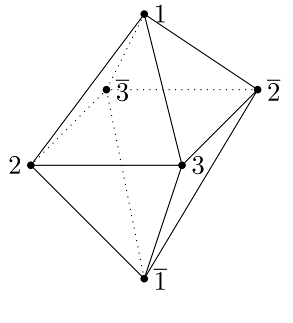
$$\langle 123, 14, 24 \rangle = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 123\}.$$

テキスト [S, pp.188–190] には単体的複体 Δ の**幾何学的実現** (geometric realization) $|\Delta| \subset \mathbb{R}^d$ (d は十分大きい正整数) が紹介されているが，ここでは省略し，一つ例を挙げて状況を説明しよう．

例 12.4. $V = \{1, \overline{1}, 2, \overline{2}, 3, \overline{3}\}$ とし，

$$\Delta := \left\langle 123, \overline{1}23, 1\overline{2}3, 12\overline{3}, \overline{12}3, \overline{1}2\overline{3}, 1\overline{23}, \overline{123} \right\rangle$$

を考える．この単体的複体 Δ は，下図のような八面体の面，辺，点からなる集合と見なせる．



$$\begin{aligned}\Delta = \big\{&123, \overline{1}23, 1\overline{2}3, 12\overline{3}, \overline{12}3, \overline{1}2\overline{3}, 1\overline{23}, \overline{123},\\ &12, 13, 1\overline{2}, 1\overline{3}, \overline{1}2, \overline{1}3, \overline{12}, \overline{13}, 23, 2\overline{3}, \overline{2}3, \overline{23},\\ &1, 2, 3, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3},\\ &\emptyset\big\}\end{aligned}$$

12.2 f ベクトルと Kruskal-Katona の定理

さて, 単体的複体にまつわる組み合わせ論的な量を一つ導入しよう.

定義. Δ を頂点集合 V の単体的複体とし, $d-1 := \dim\Delta$ とする. 各 $i=-1,0,\ldots,d-1$ に対して f_i で i 次元の面の数を表す. 特に $f_{-1}=1$ であり, $f_0=\#V$ である. そして数ベクトル

$$f(\Delta) := (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1}) \in \mathbb{N}^d \tag{12.2.1}$$

を Δ **の** f **ベクトル**と呼ぶ.

発表用問題 12.1 (解答は 12.1)**.** $\Delta \neq \emptyset$ なら $f(\Delta) \in \mathbb{P}^d$, つまり各 f_i は正整数であることを示せ.

まず与えられたベクトルに対して, それがいつ単体的複体の f ベクトルになるかを考えよう. 天下りだが, 次のような正整数の二項係数による分解を紹介する.

命題 12.5. 任意の正整数 n, j に対し, 整数列

$$n_j > n_{j-1} > \cdots > n_1 \geq 0$$

であって次を満たすものが唯一存在する.

$$n = \binom{n_j}{j} + \binom{n_{j-1}}{j-1} + \cdots + \binom{n_1}{1}. \tag{12.2.2}$$

証明 j に関する帰納法で主張を示そう. $j=1$ の場合は $n_1 := n$ とすればよい. 一意性も明らか. そこで $j-1$ 以下で証明できたと仮定しよう. 与えられた n, j に対して, m_j を $n \geq \binom{m_j}{j}$ となる最大の整数とする. 帰納法の仮定から次を満たす $n_{j-1} > n_{j-2} > \cdots > n_1 \geq 0$ が唯一存在する.

$$n - \binom{m_j}{j} = \binom{n_{j-1}}{j-1} + \binom{n_{j-2}}{j-2} + \cdots + \binom{n_1}{1}.$$

更に $m_j > n_{j-1}$ が成立する. 実際, $m_j \leq n_{j-1}$ なら

$$n \geq \binom{m_j}{j} + \binom{n_{j-1}}{j-1} \geq \binom{m_j}{j} + \binom{m_j}{j-1} = \binom{m_j+1}{j}$$

となって m_j の取り方と矛盾する. 従って $n_j := m_j$ として, 数列 $n_j > n_{j-1} > \cdots > n_1 \geq 0$ の存在が示せた.

一意性については, $m, i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $i \leq m$ に対して次の恒等式が成立することに注意する (問題 12.2).

$$\binom{m}{i} + \binom{m-1}{i-1} + \cdots + \binom{m-i+1}{1} + \binom{m-i}{0} = \binom{m+1}{i}. \tag{12.2.3}$$

この等式を $m = m_j - 1$, $i = j$ に適用すると

$$\binom{m_j-1}{j} + \binom{m_j-2}{j-1} + \cdots + \binom{m_j-j}{1} = \binom{m_j}{j} - 1 < n. \tag{12.2.4}$$

もし $n'_j > n'_{j-1} > \cdots > n'_1 \geq 0$ が (12.2.2) を満たすなら, $n \geq \binom{n'_j}{j}$ より $m_j \geq n'_j$. 一方 (12.2.4) の左辺は $\binom{m_j-1}{j}$ で始まる j 個の二項係数の和で最大のものを与える. よって, もし $n_j \leq m_j - 1$ なら

$$\binom{n'_j}{j} + \binom{n'_{j-1}}{j-1} + \cdots + \binom{n'_1}{1} \leq \binom{n'_j}{j} + \binom{n'_j-1}{j-1} + \cdots + \binom{n'_j-j}{1} \leq \text{(12.2.4) の左辺} < n$$

となって矛盾する. つまり $n'_j \geq m_j$. 以上より $n'_j = m_j = n_j$. $n_{j-1} > \cdots > n_1$ の一意性は帰納法の仮定から従う. □

発表用問題 12.2 (解答は 12.2)**.** 等式 (12.2.3) を証明せよ.

定義. 命題 12.5 の分解 (12.2.2)

$$n = \binom{n_j}{j} + \binom{n_{j-1}}{j-1} + \cdots + \binom{n_1}{1}, \quad (n_j > n_{j-1} > \cdots > n_1 \geq 0)$$

を n の j 二項展開 (j-binomial expansion)[26] と呼ぶ. 更にそれを用いて $n^{(j)} \in \mathbb{N}$ を次で定める.

$$n^{(j)} := \binom{n_j}{j+1} + \binom{n_{j-1}}{j} + \cdots + \binom{n_1}{2}.$$

さて, f ベクトルの特徴づけに話を戻そう.

定理 12.6 (Kruskal-Katona の定理)**.** 正整数の数列 $(f_0, f_1, \dots, f_{d-1}) \in \mathbb{P}^d$ が $d-1$ 次元単体的複体の f ベクトルであるための必要十分条件は

$$f_{i+1} \leq f_i^{(i+1)} \quad (i = 0, 1, \dots, d-2). \tag{12.2.5}$$

例. 例 12.4 の八面体に対応した単体的複体 Δ について, $\dim \Delta = 2 = 3-1$ 及び $f(\Delta) = (f_0, f_1, f_2) = (6, 12, 8)$ である. f_i の $i+1$ 二項展開と $f_i^{(i+1)}$ を計算すると

$$f_0 = 6 = \binom{6}{1}, \qquad f_0^{(1)} = \binom{6}{2} = 15 \geq f_1 = 12,$$
$$f_1 = 12 = \binom{5}{2} + \binom{2}{1}, \qquad f_1^{(2)} = \binom{5}{3} + \binom{2}{2} = 11 \geq f_2 = 8.$$

テキスト [S] では, Kruskal-Katona の定理 12.6 の証明のうち十分条件の方のみが示されている. この講義ノートもそれを解説する. 必要条件の証明については [S, p.213, Notes for Chapter 12] を参照せよ.

Kruskal-Katona の定理の (12.2.5) が十分条件であることを示すには, それを満たすベクトル f に対して $f(\Delta) = f$ となる単体的複体 Δ を具体的に構成すれば良い. その記述のために逆辞書式順序を導入しよう.

定義. 長さ j の非負整数列の集合 $\mathbb{N}^j$ を考える. $\mathbb{N}^j$ 上の**逆辞書式順序** (reverse lexicographic order) $\overset{R}{\leq}$ を次で定める: $a = (a_1, \dots, a_j)$ と $b = (b_1, \dots, b_j)$ に対し

$$a \overset{R}{\leq} b :\Longleftrightarrow \text{ある } 0 \leq i \leq j-1 \text{ が存在して}$$
$$a_j = b_j,\ a_{j-1} = b_{j-1},\ \dots,\ a_{j-i+1} = b_{j-i+1},\ a_{j-i} \leq b_{j-i}.$$

定義 (テキスト [S, p.193, 最後の段落])**.** $f = (f_0, \dots, f_{d-1}) \in \mathbb{P}^d$ に対し, Γ_f を $\mathbb{N}$ の部分集合からなる有限集合であって, $\emptyset$ 及び $\mathbb{N}$ の $(i+1)$ 元部分集合のうち逆辞書式順序で小さい順に f_i 個からなるものとする.

26) 訳語は講義ノート特有のものです.

例. 有限集合を $01 := \{0,1\}$ の様に略記すると, $f=(6,8,5,2)$ に対する Γ_f は

$$\Gamma_{(6,8,5,2)} := \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \\ 0,1,2,3,4,5, \\ 01,02,12,03,13,23,04,14, \\ 012,013,023,123,014, \\ 0123,0124 \end{array} \right\}$$

この $\Gamma_{(6,8,5,2)}$ は単体的集合ではない (例えば $0124 \in \Gamma_f$ だが $124 \notin \Gamma_f$).

定理 12.8. $f=(f_0,\dots,f_{d-1}) \in \mathbb{P}^d$ について, Γ_f が単体的複体であるための必要十分条件は (12.2.5), つまり

$$f_{i+1} \leq f_i^{(i+1)} \quad (i=0,1,\dots,d-2).$$

特に Kruskal-Katona の定理のうち, (12.2.5) が十分条件であることが従う.

証明 $m \in \mathbb{N}$ に対し $[0,m] := \{0,1,\dots,m\}$ と書き, また集合 S に対する §1.1 の記号 $\binom{S}{m} := \{T \subseteq S \mid \#T = m\}$ を用いる. 後者と $S \cap U = \emptyset$ となる集合 U に対して

$$U \cup \binom{S}{m} := \left\{ T \cup U \,\middle|\, T \in \binom{S}{m} \right\}$$

と書く. さて, $f_i = \binom{n_{i+1}}{i+1} + \binom{n_i}{i} + \cdots + \binom{n_1}{1}$ を f_i の $(i+1)$ 二項展開とする. $(i+1)$ 元からなる $\mathbb{N}$ の部分集合であって逆辞書式順序に関して小さい順に f_i 番目までのもの達からなる集合 X は

$$\begin{aligned} X = &\binom{[0,n_{i+1}-1]}{i+1} \cup \left(\binom{[0,n_i-1]}{i} \cup \{n_{i+1}\} \right) \cup \left(\binom{[0,n_{i-1}-1]}{i} \{n_i, n_{i+1}\} \right) \cup \cdots \\ &\cup \left(\binom{[0,n_1-1]}{1} \cup \{n_2, n_3, \dots, n_{i+1}\} \right). \end{aligned}$$

すると, $(i+2)$ 元からなる $\mathbb{N}$ の部分集合であって, その $(i+1)$ 元部分集合がどれも X に属するもの達からなる集合 Y は

$$\begin{aligned} Y = &\binom{[0,n_{i+1}-1]}{i+2} \cup \left(\binom{[0,n_i-1]}{i+1} \cup \{n_{i+1}\} \right) \cup \left(\binom{[0,n_{i-1}-1]}{i} \{n_i, n_{i+1}\} \right) \cup \cdots \\ &\cup \left(\binom{[0,n_1-1]}{2} \cup \{n_2, n_3, \dots, n_{i+1}\} \right). \end{aligned}$$

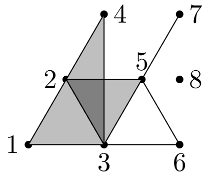
ここに挙がっているのは $\mathbb{N}$ の $(i+2)$ 元部分集合であって逆辞書式順序に関して小さい順に $f_i^{(i+1)}$ 番目までのもの達である. Γ_f が単体的複体である為には, Γ_f に属する $(i+2)$ 元が Y に含まれること, つまり $f_{i+1} \leq f_i^{(i+1)}$ が必要十分. よって主張が示せた. □

12.3 シェラブルな単体的複体

以下では単体的複体のうちシェラブル (定義 12.10) と呼ばれるものについて, その f ベクトルの特徴付けを考えたい. 特徴付けには可換環論が必要になり, 詳しくは次回説明する.

定義. 単体的複体は, そのファセット達の次元が全て等しい時, **純** (pure) であると言う.

例. 例 12.4 の八面体に対応した単体的複体 Δ は純である. 一方, 下図の単体的複体 Δ' は純ではない (テキスト [S, Fig. 12.1] も参照のこと).



$$\Delta' = \{123, 234, 235, 12, 13, 23, 24, 25, 35, 36, 56, 57, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \emptyset\}$$

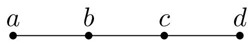
定義 12.10. $d-1$ 次元単体的複体 Δ が**シェラブル** (shellable) であるとは, Δ が純であり, かつそのファセットの集合に全順序 $F_1, F_2, \ldots, F_t$ ($t := f_{d-1}$) があって, 以下の条件を満たすことを言う.

- $\Delta_0 := \emptyset$ 及び各 $j = 1, \ldots, t$ に対し $\Delta_j := \langle F_1, \ldots, F_j \rangle$ とする. $j \geq 1$ なら, F_j の部分集合であって Δ_{j-1} に含まれないもののうち, 包含関係について極小なもの G_j が唯一存在する.

この時, 全順序 $F_1, F_2, \ldots, F_t$ ($t := f_{d-1}$) を Δ の**シェリング順序** (shelling order) または Δ の**シェリング** (shelling) と呼び, G_j を F_j の**制限** (restriction) と呼ぶ.

例 12.11. シェラブルな単体的複体の例を挙げる.

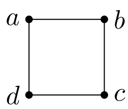
(a) 下図の単体的複体 Δ について, 全順序 ab, bc, cd はシェリング順序. 実際, $t = f_1 = 3$ で, $j = 1$ の場合は $\Delta_0 = \emptyset$, $\langle ab \rangle = \{ab, a, b, \emptyset\}$ なので $G_1 = \emptyset$. 次に $j = 2$ の場合, $\Delta_1 = \langle ab \rangle = \{ab, a, b, \emptyset\}$, $\langle bc \rangle = \{bc, b, c, \emptyset\}$ なので $\langle bc \rangle \setminus \Delta_1 = \{bc, c\}$ となり $G_2 = \{c\}$. そして $j = 3$ の場合は $\Delta_2 = \langle ab, bc \rangle = \{ab, bc, a, b, c, \emptyset\}$, $\langle cd \rangle = \{cd, c, d, \emptyset\}$ より $\langle cd \rangle \setminus \Delta_2 = \{cd, d\}$ となって $G_3 = \{d\}$.



$$\Delta = \{ab, bc, cd, a, b, c, d, \emptyset\}$$

しかし ab, cd, bc はシェリング順序ではない. 実際, $j = 2$ の時に, $\Delta_1 = \langle ab \rangle = \{ab, a, b, \emptyset\}$ と $\langle cd \rangle = \{cd, c, d, \emptyset\}$ より $\langle cd \rangle \setminus \Delta_1 = \{cd, c, d\}$ なので, c と d の二つが極小元.

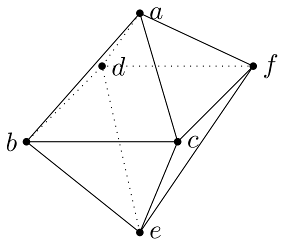
(b) 以下の図の単体的複体 Δ について, 全順序 ab, bc, cd, da はシェリング順序 (問題 12.3).



$$\Delta = \{ab, bc, cd, da, a, b, c, d, \emptyset\}$$

発表用問題 12.3 (解答は 12.3)**.** 例 12.11 (b) の単体的複体 Δ について, 全順序 ab, bc, cd, da がシェリング順序であることを示せ.

例 12.12. 例 12.4 の八面体に対応した単体的複体 Δ について, 下図のように頂点のラベルを付け直すと, 全順序 $abc, abd, bce, acf, bde, cef, adf, def$ はシェリング順序である (問題 12.4).



$$\Delta = \{abc, abd, acf, adf, ebc, ebd, ecf, edf, ab, ac, ad, af, bc, bd, be, ce, cf, de, df, ef, a, b, c, d, e, f, \emptyset\}$$

発表用問題 12.4 (解答は 12.4). 例 12.12 の八面体単体的複体 Δ の全順序に関して, $t = f_2 = 8$ に注意して

$$G_1 = \emptyset,\ G_2 = d,\ G_3 = e,\ G_4 = f,\ G_5 = de,\ G_6 = ef,\ G_7 = df,\ G_8 = def$$

となり, 特に Δ がシェラブルであることを示せ.

シェラブルな単体的複体の f ベクトルを調べる上で次の定義が役立つ.

定義 (テキスト [S, p.197, (12.5)]). $\Delta \neq \emptyset$ を $(d-1)$ 次元単体的複体とする. その f ベクトル $f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ 及び $f_{-1} = 1$ から

$$\sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i} \tag{12.3.1}$$

によって $h_0, h_1, \dots, h_d$ を定め,

$$h(\Delta) := (h_0, h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1} \tag{12.3.2}$$

とする. これを **Δ の h ベクトル**と呼ぶ.

例 12.14. 例 12.11, 12.12 のシェラブルな単体的複体について h ベクトルを計算しよう.

(1) 例 12.11 (a) の Δ については, $f(\Delta) = (4, 3)$ より

$$(x-1)^2 + 4(x-1) + 3 = x^2 + 2x$$

となるので $h(\Delta) = (1, 2, 0)$.

(2) 例 12.11 (b) の Δ については, $f(\Delta) = (4, 4)$ より

$$(x-1)^2 + 4(x-1) + 4 = x^2 + 2x + 1$$

となるので $h(\Delta) = (1, 2, 1)$.

(3) 例 12.12 の八面体 Δ については, $f(\Delta) = (6, 12, 8)$ より

$$(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 12(x-1) + 8 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

となるので $h(\Delta) = (1, 3, 3, 1)$.

シェラブルな単体的複体の h ベクトルは次のような意味を持つ.

定理 12.15. $F_1, \dots, F_t$ を $(d-1)$ 次元単体的複体 Δ のシェリング順序とし, $G_1, \dots, G_t$ を付随する制限とする. この時

$$\sum_{i=0}^{d} h_i x^i = \sum_{j=1}^{t} x^{\#G_j}.$$

証明はレポート問題 11 にする. この主張からシェラブルである為の必要条件が得られる.

系 12.16. $\Delta \neq \emptyset$ を純 $(d-1)$ 次元単体的複体とする. Δ がシェラブルならば

$$h_i(\Delta) \geq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, d)$$

注意. h ベクトルの定義の (12.3.1) で $x=0$ とすれば,

$$h_d = (-1)^{d-1}(\chi(\Delta)-1), \quad \chi(\Delta) := f_0 - f_1 + f_2 - \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1}$$

となる. $\chi(\Delta)$ は Euler 指標 (Euler characteristic) と呼ばれる量で, 実は幾何学的実現 $|\Delta|$ の位相不変量である.

12.4 環, イデアル, 剰余環

次回行う h ベクトルに関する議論では簡単な可換環論が必要になる. その準備をこの副節で行う. 詳細は 3 年生後期の代数学要論 (環論) で扱われる.

K を体とする (例えば複素数全体 $\mathbb{C}$). $V=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ を変数の集合とする K 係数の多項式全体のなす集合を次のように書く.

$$K[V] = K[x_1,\ldots,x_n].$$

この集合は, 多項式の和に関して群であり, 多項式の積に関して結合則が成立し, さらに積は和に関して分配法則を満たす. つまり以下の意味で単位元を持つ可換環である.

定義. 集合 R に二項演算 $+$ と $\cdot$ があって以下の三条件が満たされる時, $(R,+,\cdot)$ を**環** (ring) と呼ぶ.

(i) R は $+$ に関して可換群である.

(ii) 演算 $\cdot$ は結合律を満たす: 任意の $a,b,c\in R$ に対して $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.

(iii) 演算 $\cdot$ は $+$ に関して分配法則を満たす. つまり任意の $a,b,c\in R$ に対して $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$, $(b+c)\cdot a=(b\cdot a)+(c\cdot a)$.

簡単のため $(R,+,\cdot)$ のことを R と書く. 演算 $+$ を環 R の和と呼び, 可換群 $(R,+)$ の単位元を 0 と書いて環 R の零元と呼ぶ. また演算 $\cdot$ を R の積と呼ぶ.

以降, 環の積 $\cdot$ を略して $ab := a\cdot b$ 等と書くこともある.

定義. 環 R の元 1 は, 任意の $a\in R$ に対して $1\cdot a = a\cdot 1 = a$ を満たす時, R の単位元と呼ばれる.

定義. 積が可換な環 R を**可換環** (commutative ring) と呼ぶ.

多項式の和 $+$ と積 $\cdot$ でもって $(K[V],+,\cdot)$ は可換環になり, 更に $1\in K[V]$ はこの環の単位元である. この可換環の構造を強調するために, $K[V]$ のことを (n 変数の K 係数) **多項式環** (polynomial ring) と呼ぶ.

定義. 体 K 上の線形空間 A が環構造を持ち, 更に

(i) 環としての和と線形空間としての和は一致する.

(ii) 任意の $k\in K$ と $a,b\in A$ について, K 上の線形空間としてのスカラー倍を $k\cdot a\in A$ と書くと $k\cdot(ab)=(k\cdot a)b=a(k\cdot b)$.

の二条件を満たす時, A を K **上の代数** (algebra over K) または K **代数** (K-algebra) と呼ぶ[27].

また環として可換環である K 代数を K **上の可換代数** (commutative algebra over K) または**可換 K 代数** (commutative K-algebra) と呼ぶ.

---

27) K 上の結合代数 (associative algebra), または K 上の多元環とも呼ばれます.

この意味で多項式環 $K[V]$ は可換 K 代数である.

定義. 環 R の部分集合 I が和に関して部分群であり, I の各元に R の任意の元を左からかけても, また右からかけても I に含まれる時, I を R の**両側イデアル** (two-sided ideal) と呼ぶ.

R が可換環の場合, その両側イデアルのことを単に**イデアル**と呼ぶ.

定義. 可換環 R の元 $a_1, \dots, a_r \in R$ に対し, 次の集合は R のイデアルである.

$$(a_1, \dots, a_r) := \{a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r \mid f_i \in R\ (i = 1, \dots, r)\}.$$

これを $a_1, \dots, a_r$ **が生成するイデアル**と呼ぶ. また R の部分集合 S に対し,

$$\{s_1 f_1 + \cdots + s_j f_j \mid j = 1, 2, \dots,\ s_i \in S,\ f_i \in R\ (i = 1, \dots, j)\}$$

も R のイデアルである. これを S **が生成するイデアル**と呼ぶ.

発表用問題 12.5. $(a_1, \dots, a_r)$ が a_i 達を含む R のイデアルのうち最小のものであることを示せ.

環 R の両側イデアル I が与えられた時, $f, g \in R$ に対して二項関係 $\sim_I$ を次で定義する:

$$f \sim_I g :\Longleftrightarrow\ f - g \in I.$$

発表用問題 12.6. $\sim_I$ が同値関係であることを確かめよ.

$\sim_I$ による同値類の集合 $R/\sim_I$ を次のように書く:

$$R/I := R/\sim_I .$$

発表用問題 12.7. $f \in R$ を含む同値類が $f + I := \{f + a \mid a \in I\}$ で与えられることを確認せよ.

R/I に次のように二項演算を定義すると, $(R/I, +, \cdot)$ は環になる:

$$\begin{aligned} \text{和:}\quad & (f+I) + (g+I) := (f+g) + I, \\ \text{積:}\quad & (f+I)\cdot(g+I) := fg + I. \end{aligned} \tag{12.4.1}$$

定義. 上記の環 R/I を環 R の両側イデアル I による**剰余環** (quotient ring) と呼ぶ.

発表用問題 12.8. 剰余環 R/I の零元は I で, $f + I$ の和に関する逆元が $-f + I$ であることを示せ.

発表用問題 12.9. 多項式環 $K[V]$ で $K = \mathbb{C}$, $V = \{x\}$ の場合, つまり複素数係数の一変数多項式環

$$\mathbb{C}[x] = \Big\{\sum_{i=0}^{r} a_i x^i \mid r = 0, 1, \dots,\ a_i \in \mathbb{C}\ (i = 0, 1, \dots, r)\Big\}$$

を考える. $x^n \in \mathbb{C}[x]$ が生成するイデアル (x) は, 集合としては

$$(x^n) = x^n\mathbb{C}[x] := \Big\{\sum_{i=0}^{r} a_i x^{i+n} \mid r = 0, 1, \dots,\ a_i \in \mathbb{C}\ (i = 0, 1, \dots, r)\Big\}$$

となる. $n = 0, 1, 2$ の場合に, それぞれの剰余環 $\mathbb{C}[x]/(x^n)$ がどのようなものか記述せよ.

定義. 環 R から環 S への (**環**) **準同型** (ring homomorphism) とは, 写像 $\varphi\colon R \to S$ であって和に関する群準同型であり, かつ積に関して $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ を満たすもののことを言う.

全単射である環準同型を **(環) 同型** (ring isomorphism) と呼ぶ.

発表用問題 12.10. R を可換環, I をそのイデアルとする. 同値類の集合への射影

$$\varphi\colon R \longrightarrow R/\sim_I = R/I, \quad a \longmapsto a+I \tag{12.4.2}$$

は環準同型であることを示せ.

発表用問題 12.11. 環 R から環 S への同型がある時 $R \simeq S$ と書く. $\simeq$ が同値関係であることを示せ.

補題. 環 R から環 S への準同型 $\varphi\colon R \to S$ について, その**核** (kernel)

$$\operatorname{Ker}\varphi := \{r \in R \mid \varphi(r) = 0\}$$

は R の両側イデアルである.

証明 $r, s \in \operatorname{Ker}\varphi$ なら $\varphi(r+s) = \varphi(r) + \varphi(s) = 0 + 0 = 0$ なので $\operatorname{Ker}\varphi$ は R の和に関する部分群. また $r \in \operatorname{Ker}\varphi$, $a \in R$ に対して $\varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) = 0\varphi(a) = 0$, $\varphi(ar) = \varphi(r)\varphi(a) = \varphi(a)0 = 0$. よって $\operatorname{Ker}\varphi \subset R$ は両側イデアル. □

発表用問題 12.12. 可換環 R とそのイデアル I について, (12.4.2) の環準同型 $\varphi\colon R \to R/I$ の核を求めよ.

命題 (環の準同型定理)**.** 環 R から環 S への環準同型 $\varphi\colon R \to S$ について, その**像** (image)

$$\operatorname{Im}\varphi := \{\varphi(a) \mid a \in R\}$$

は S の和と積でもって環になる. 更に φ から次の環同型が定まる.

$$\overline{\varphi}\colon R/\operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{\ \sim\ } \operatorname{Im}\varphi, \quad a + \operatorname{Ker}\varphi \longmapsto \varphi(a). \tag{12.4.3}$$

証明 前半は略す. 後半について, まず写像 $\overline{\varphi}$ が well-defined であることは, $a + \operatorname{Ker}\varphi = b + \operatorname{Ker}\varphi$ なら $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi$, つまり $\varphi(a-b) = 0$ なので $\varphi(a) = \varphi(b)$ となって従う.

次に環準同型であることは, $a, b \in R$ に対して $\overline{\varphi}\big((a+\operatorname{Ker}\varphi)+(b+\operatorname{Ker}\varphi)\big) = \overline{\varphi}(a+\operatorname{Ker}\varphi)+\overline{\varphi}(b+\operatorname{Ker}\varphi)$ 及び $\overline{\varphi}\big((a+\operatorname{Ker}\varphi)(b+\operatorname{Ker}\varphi)\big) = \overline{\varphi}(a+\operatorname{Ker}\varphi)\overline{\varphi}(b+\operatorname{Ker}\varphi)$ を示せばよいが, 簡単なので略す.

$\overline{\varphi}$ の全射性は $\operatorname{Im}\varphi \ni \varphi(a)$ に対して $a + \operatorname{Ker}\varphi \in R/\operatorname{Ker}\varphi$ が取れることから従う. 最後に単射性は $\overline{\varphi}(a+\operatorname{Ker}\varphi) = 0 \iff \varphi(a) = 0 \iff a \in \operatorname{Ker}\varphi \iff a + \operatorname{Ker}\varphi = 0 \in R/\operatorname{Ker}\varphi$ から従う. □

補題. 可換環 R とその二元 a, b を考える. 問題 12.7 より, 剰余環 $R/(a)$ における b を含む同値類は $b + (a)$ なので, それが生成するイデアルは $\big(b+(a)\big) \subset R/(a)$ と書ける. この時

$$R/(a,b) \simeq \big(R/(a)\big)/\big(b+(a)\big).$$

証明 写像 $\varphi\colon R/(a) \to R/(a,b)$, $\varphi(r+(a)) := r + (a,b)$ は well-defined. これは全射環準同型で $\operatorname{Ker}\varphi = \big(b+(a)\big)$ だから, 環の準同型定理 (12.4.3) より結論が従う. □

この補題の環同型を, 記号を濫用して次のように表す.

$$R/(a,b) \simeq \big(R/(a)\big)/(b). \tag{12.4.4}$$

そして右辺の $(b) := \big(b + (a)\big)$ を「$R/(a)$ において b が生成するイデアル」と呼ぶことにする.

レポート問題

レポート問題 11 (解答 11)**.** 定理 12.15 を証明せよ.

(テキスト [S, 12.15 Theorem] の証明を理解してレポートにまとめて下さい.)

12 可換環と組み合わせ論 その 2 (7/30)

今回の内容はテキスト [S, §12.2] に基づく. 目標は次の定理である.

定理 (テキスト [S, pp.209–210, 12.25 Theorem]). 整数列 $h=(h_0,h_1,\dots,h_d)$ に関する次の三条件は同値.

(a) $(d-1)$ 次元 Cohen-Macaulay 単体的複体 Δ が存在して $h=h(\Delta)$.

(b) $(d-1)$ 次元のシェラブルな単体的複体 Δ が存在して $h=h(\Delta)$.

(c) h は e ベクトル.

単体的複体についての議論を進める前に, 必要になる可換環論の諸概念を §12.5 で概説する. 前回の §12.4 で導入した環論の基本的な概念を用いるので思い出しておいて欲しい.

12.5 次数付き環, Hilbert 級数, 正則列, depth

§12.4 に引き続き K を体とする.

定義. K 代数 A に K 線形空間としての直和分解 $A=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}A_d$ が定められていて, 任意の $a_d\in A_d$ と $a_e\in A_e$ に対して $a_da_e\in A_{d+e}$ となる時, A を**次数付き K 代数** (graded K-algebra) と呼ぶ.

次数付き K 代数 $A=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}A_d$ の元 f は, $i\in\mathbb{N}$ が存在して $f\in A_d$ となる時, **次数 d の斉次元** (homogeneous element of degree d) と呼ばれる.

例. 多項式環 $K[V]=K[x_1,\dots,x_n]$ は, 各 x_i を次数 1 の斉次元とすることで

$$K[V]=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}K[V]_d,\quad K[V]_d=\{(\text{通常の意味での) 全次数が } d \text{ である多項式}\} \tag{12.5.1}$$

と直和分解し, 次数付き可換 K 代数の構造を持つ.

以下, 有限次元 K 線形空間 V に対し $\dim_K V$ で V の次元を表す.

定義 (c.f. テキスト [S, p.202]). 次数付き K 代数 $A=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}A_d$ の各斉次部分 A_d が有限次元の場合, A の **Hilbert 級数**を次で定義する.

$$L(A,t):=\sum_{d\in\mathbb{N}}t^d\dim_K A_d. \tag{12.5.2}$$

例. 一変数多項式環 $K[x]$ を (12.5.1) で次数付き可換 K 代数とみなす. つまり $K[x]=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}Kx^d$. その Hilbert 級数は

$$L(K[x],t)=\sum_{d\in\mathbb{N}}t^d=:\frac{1}{1-t}. \tag{12.5.3}$$

これ以降 $\frac{1}{1-t}$ を級数 $1+t+t^2+\cdots$ とみなす.

この副節の目標は剰余環の Hilbert 級数に関する定理 12.20 である. 準備を幾つか行う.

補題 (c.f. テキスト [S, (12.13)]). 次数付き可換 K 代数 $A=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}A_d$ の斉次元 θ について, θ が生成

するイデアル $(\theta) \subset A$ による剰余環 $A/(\theta)$ は

$$A/(\theta) = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} \big(A/(\theta)\big)_d, \quad \big(A/(\theta)\big)_d := \{f + (\theta) \mid f \in A_d\} \tag{12.5.4}$$

により次数付き可換 K 代数の構造を持つ (記号 $f + (\theta)$ については問題 12.7 を参照).

証明 集合として $A/(\theta) = \{f + (\theta) \mid f \in A\}$ であるから, (12.5.4) が K 線形空間としての直和分解を与えることは明らか. $f \in A_d$, $g \in A_e$ なら $fg \in A_{d+e}$ だから, 剰余環の積の定義 (12.4.1) から $\big(f + (\theta)\big) \cdot \big(g + (\theta)\big) = fg + (\theta) \in \big(A/(\theta)\big)_{d+e}$. よって $A/(\theta)$ は次数付き可換 K 代数. □

定義 (テキスト [S, p.203 後半]). 可換環 R の元 u は, $uy = 0$ となる $y \in R$ が $y = 0$ に限られる時, **正則**である (regular), または**非零因子** (non-zero-divisor) と呼ばれる.

二つの実係数級数 $a(t) = \sum_{i\geq 0} a_i t^i$ と $b(t) = \sum_{i\geq 0} b_i t^i$ に対して半順序 $a(t) \leq b(t)$ を次で定める:

$$a(t) \leq b(t) :\Longleftrightarrow \text{全ての } i \in \mathbb{N} \text{ に対して } a_i \leq b_i.$$

補題 12.19. 各斉次部分が有限次元である次数付き可換 K 代数 $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} A_d$ と $\theta \in A_1$ に対して

$$L(A, t) \leq \frac{L(A/(\theta), t)}{1 - t}.$$

更に, 等号が成立することと θ が非零因子であることは同値.

証明 まず K 線形空間としての同型 $\big(A/(\theta)\big)_{d+1} \simeq A_{d+1}/\theta A_d$ を示す. (12.5.4) より $\big(A/(\theta)\big)_{d+1} = \{a + (\theta) \mid a \in A_{d+1}\}$. 線形写像 $\varphi\colon A_{d+1} \to \big(A/(\theta)\big)_{d+1}$, $a \mapsto a + (\theta)$ を考えると, これは全射で, 核は

$$\operatorname{Ker}\varphi = (\theta) \cap A_{d+1} = \{r\theta \mid r \in A\} \cap A_{d+1} = \{r\theta \mid r \in A_d\} = \theta A_d.$$

従って線形写像の準同型定理から $\big(A/(\theta)\big)_{d+1} \simeq A_{d+1}/\theta A_d$. 特に

$$\dim_K \big(A/(\theta)\big)_{d+1} = \dim_K A_{d+1} - \dim_K \theta A_d \tag{12.5.5}$$

次に $\theta \in A_1$ による積写像 $A_d \to A_{d+1}$, $a \mapsto \theta a$ を考える. その像 $\theta A_d \subset A_{d+1}$ の次元について,

$$\dim_K \theta A_d \leq \dim_K A_d$$

が成立し, 等号成立と θ が非零因子であることが同値なことが分かる. これと (12.5.5) から

$$\dim_K \big(A/(\theta)\big)_{d+1} \geq \dim_K A_{d+1} - \dim_K A_d$$

であり, 等号は θ が非零因子の時に限って成立する. 両辺に t^{d+1} をかけて $d \geq -1$ で足し上げると

$$L(A/(\theta), t) \geq L(A, t) - tL(A, t)$$

となり, 結論を得る. □

(12.4.4) において可換環 R の二元 a, b に対して, 剰余環 $R/(a)$ の元 $b + (a)$ のことを単に b と書いた. 同様の記号・用語の濫用を用いて, 次の定義を導入する.

定義. 可換環 R の元の列 $(\theta_1, \ldots, \theta_j)$ は, 任意の $1 \leq i \leq j-1$ について θ_i が剰余環 $R/(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})$ の正則元である場合, **正則列** (regular sequence) と呼ばれる.

補題 12.19 を繰り返し用いると

定理 12.20. $A = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} A_d$ を斉次部分が有限次元である次数付き可換環とし, また $\theta_1, \ldots, \theta_j \in A_1$ とする. この時

$$L(A, t) \leq \frac{L(A/(\theta_1, \ldots, \theta_j), t)}{(1-t)^j}$$

であり, 等号は $(\theta_1, \ldots, \theta_j)$ が正則列である時に限り成立する.

12.6 Stanley-Reisner 環

引き続き K を体とする. $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ とし, 部分集合 $S \subseteq V$ に対し

$$x_S := \prod_{x_i \in S} x_i \in K[V] = K[x_1, \ldots, x_n]$$

と書く. 例えば $S = \{x_1, x_2, x_4\}$ なら $x_S = x_1 x_2 x_4$.

定義. Δ を頂点集合 $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ の単体的複体とする. I_Δ を $\{x_S \mid S \notin \Delta\}$ が生成する $K[V]$ のイデアルとする. 剰余環

$$K[\Delta] := K[V]/I_\Delta$$

を Δ の **face ring** または **Stanley-Reisner 環**という.

Stanley-Reisner 環の K 線形空間としての基底を一つ与えよう.

定義. 単項式 $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ に対し $\mathrm{supp}(u) := \{x_i \mid a_i > 0\}$ とし, これを u の**台** (support) と呼ぶ.

補題 (テキスト [S, p.202, 最初の段落])**.** イデアル I_Δ について, 次の部分集合は I_Δ の K 線形空間としての基底である.

$$\{u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in I_\Delta \mid \mathrm{supp}(u) \notin \Delta\}.$$

発表用問題 12.13. この補題を示せ.

以下, $f \in K[V]$ に対して $f + I_\Delta \in K[\Delta]$ を $\overline{f}$ と書く.

系. $K[\Delta]$ の K 基底として,

$$\{\overline{u} \mid u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in K[V],\ \mathrm{supp}(u) \in \Delta\}, \tag{12.6.1}$$

つまり台が Δ の面 (§12.1 参照) である単項式からなる集合が取れる.

ここで $1 = x_1^0 \cdots x_n^0$, $\mathrm{supp}(1) = \emptyset$ より 1 も基底 (12.6.1) に含まれることに注意する. この系が face ring という $K[\Delta]$ の名前の由来である.

基底 (12.6.1) の各元 $\overline{u}$ に対して $\deg \overline{u} := \deg u = a_1 + \cdots + a_n$ とすれば, 直和分解

$$K[\Delta] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} K[\Delta]_i, \quad K[\Delta]_i := \bigoplus_{\deg \overline{u} = i} K\overline{u} \tag{12.6.2}$$

が得られる. すると $K[\Delta]$ は次数付き可換 K 代数になり, (12.5.2) の Hilbert 級数 $L(K[\Delta], t)$ が定まる.

ここで単体的複体の次元 (12.1.1) 及び h ベクトル (12.3.2) を思い出して欲しい.

定理 12.18. Δ が $(d-1)$ 次元単体的複体で $h(\Delta) = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ の時,

$$L(K[\Delta], t) = \frac{h_0 + h_1 t + \cdots + h_d t^d}{(1-t)^d}.$$

証明 Δ の面 F に対し, M_F で $\mathrm{supp}(u) = F$ となる単項式 $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ の集合を表すと

$$\sum_{u \in M_F} t^{\deg(u)} = \Bigl(\prod_{x_i \in F} \sum_{a_i \geq 1} t^{a_i} \Bigr) = \frac{t^{\# F}}{(1-t)^{\# F}}$$

これを F について足し上げると, $\dim \Delta = d-1$ だから

$$L(K[\Delta], t) = \sum_{F \in \Delta} \frac{t^{\# F}}{(1-t)^{\# F}} = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} \frac{t^i}{(1-t)^i} = \frac{\sum_{i=0}^{d} f_{i-1} t^i (1-t)^{d-i}}{(1-t)^d}.$$

ここで $f_{-1} = 1$ 及び $f(\Delta) = (f_0, \ldots, f_d)$ は Δ の f ベクトル (12.2.1). 更に (12.3.1) を下の $(*)$ で用いて計算すると結論が得られる.

$$\sum_{i=0}^{d} f_{i-1} t^i (1-t)^{d-i} = t^d \sum_{i=0}^{d} f_{i-1} \bigl(t^{-1} - 1\bigr)^{d-i} \overset{(*)}{=} t^d \sum_{i=0}^{d} h_i t^{-(d-i)} = \sum_{i=0}^{d} h_i t^i.$$

□

注意. d が Hilbert 級数の $t=1$ の極の位数であることとは可換環 $K[\Delta]$ の Krull 次元と関係する. テキストの [S, p.203, 後半] を参照のこと.

12.7 Cohen-Macaulay 性

今まで通り, Δ を単体的複体, K を体とする. $K[\Delta]$ の次数付け (12.6.2) を思い出して欲しい. また正則列と Hilbert 級数との関係 (定理 12.20) を思い出して欲しい.

定義. 可換環 R の正則列の長さの最大値を R の **depth** (深さ) と言い, $\mathrm{depth}\, R$ と書く.

定義 12.21. K を無限体とする. $(d-1)$ 次元単体的複体 Δ が $\mathrm{depth}\, K[\Delta] = d$ を満たす時, Δ は **Cohen-Macaulay** と呼ばれる.

以下 K は無限体とする. Δ を $(d-1)$ 次元 Cohen-Macaulay 単体的複体とし, $\theta_1, \ldots, \theta_d \in K[\Delta]_1$ を最長の正則列とする. 剰余環

$$R := K[\Delta]/(\theta_1, \ldots, \theta_d)$$

には $K[\Delta]$ の次数付け (12.6.2) が遺伝して直和分解

$$R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i, \quad R_i := \{f + (\theta_1, \dots, \theta_d) \mid f \in K[\Delta]_i\} \tag{12.7.1}$$

が定まり，これで R は次数付き可換 K 代数になる．定理 12.18 と定理 12.20 から，Δ の h ベクトル $h(\Delta) = (h_0, \dots, h_d)$ を用いると剰余環 R の Hilbert 級数 $L(R,t)$ は

$$L(R,t) = h_0 + h_1 t + \cdots + h_d t^d. \tag{12.7.2}$$

12.8 e ベクトルと Cohen-Macaulay 単体的複体

(12.7.2) により Cohen-Macaulay 単体的複体の h ベクトルに代数的な意味がついた．次に h ベクトルの組み合わせ論的な意味を一つ与える．

定義. 有限集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ を頂点集合とする **multicomplex** とは，マルチセットの集合 Γ であって次の二条件を満たすもののことである．

(i) 各 $i = 1, \dots, n$ に対して $\{i\} \in \Gamma$.

(ii) $F \in \Gamma$ かつ $G \subseteq F$ ならば $G \in \Gamma$.

定義. multicomplex Γ に対し $e_j := \#\{F \in \Gamma \mid \#F = j\}$ とし，$e(\Gamma) := (e_0, e_1, \dots)$ を **Γ の e ベクトル**と呼ぶ．また整数列 $e = (e_0, e_1, \dots)$ であって，multicomplex Γ が存在して $e = e(\Gamma)$ となるものを **e ベクトル**と呼ぶ．

この副節の目標は:

系 12.23. Δ が Cohen-Macaulay 単体的複体ならば，その h ベクトル $h(\Delta)$ は e ベクトルである．

まず多項式環に関する以下の定理 12.22 を示す．

定義. 変数 $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ の単項順序イデアル[28](order ideal of monomials) とは，変数 V の単項式からなる集合 $\mathfrak{o}$ であって，$v \in \mathfrak{o}$ が単項式 $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ で割り切れるなら $u \in \mathfrak{o}$ となるもののことを言う．

multicomplex の定義から次の言いかえが従う．

補題. 変数 $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ の単項式からなる集合 S が単項順序イデアルになることと，

$$\{M_u := \{1^{a_1}, \dots, n^{a_n}\} \mid u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in S\} \tag{12.8.1}$$

が multicomplex であることは同値．

定義 (テキスト [S, p.206, 最終段落])**.** 多項式環 $K[V] = K[x_1, \dots, x_n]$ の**斉次イデアル**とは (有限個の[29]) 斉次多項式[30]達で生成されるイデアルのことである．

定理 12.22. 多項式環 $K[V]$ の斉次イデアル I について，剰余環 $P := K[V]/I$ の K 基底であってかつ単項順序イデアルとなるものがある．

証明はテキスト [S, p.208, 12.24 Theorem] を参照のこと．

28) この講義ノート特有の訳語です

29) 「有限個」の条件の有無は結果には関係ありません．

30) (12.5.1) の次数付けに関する斉次元のこと．

系 12.23 の証明　$(\theta_1,\dots,\theta_d)$, $\theta_i \in K[\Delta]_1$ を $K[\Delta]$ の最長正則列とする．

$$R := K[\Delta]/(\theta_1,\dots,\theta_d) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} R_i$$

を剰余環及びその次数付け (12.7.1) とする．(12.7.2) より $h_i(\Delta) = \dim_K R_i$ なので，R_i の任意の K 基底 D_i は $\#D_i = h_i$ を満たす．定理 12.22 より R_i の K 基底 B_i であって $\gamma = \bigcup_{i=0}^{d} B_i$ が単項順序イデアルになるものが存在する．(12.8.1) より Γ から multicomplex が定まるが，その e ベクトルを $(e_0, e_1, \dots)$ と書くと $e_i = \#B_i = h_i$ となる．従って主張が成立する．□

12.9　シェラブル性と Cohen-Macaulay 性

前回扱ったシェラブルな単体的複体 (定義 12.10) と Cohen-Macaulay 性が関係することを説明しよう．引き続き K は無限体とする．

定理 12.24. 頂点集合が $V = \{x_1,\dots,x_n\}$ である単体的複体 Δ について，シェラブルならば Cohen-Macaulay. 更に，Δ がシェラブルで $F_1,\dots,F_t$ を Δ のシェリング，$G_1,\dots,G_t$ を制限とすると，$B := \{x_{G_1},\dots,x_{G_t}\}$ は $R = K[\Delta]/(\theta_1,\dots,\theta_d)$ の K 基底．ここで $(\theta_1,\dots,\theta_d)$, $\theta_i \in K[\Delta]_1$ は $K[\Delta]$ の任意の最長正則列.

証明　まず任意の正則列 $\theta_1,\dots,\theta_d \in K[\Delta]_1$ が次の性質 (P) を満たすことに注意する．

(P) 任意のファセット F について，F への制限を $\psi_i := \theta_i|_{x_j=0,\mathrm{supp}(x_j)\notin F}$ と書くと，$\psi_1,\dots,\psi_d$ は線形空間 KF を張る．

定理 12.15 と定理 12.20 から，もし $B = \{x_{G_1},\dots x_{G_t}\}$ が R を張るなら，$\theta_1,\dots,\theta_d$ は正則列であり，B は R の K 基底．従って B が R を張ることを示せばよい．t に関する帰納法で定理を示す．

$t=1$ の場合 Δ は単体で $K[\Delta] = K[x_1,\dots,x_d]$. また任意の K 基底 $\theta_1,\dots,\theta_d$ は正則列であり，$R = K[\Delta]/(\theta_1,\dots,\theta_d) = K$ の Hilbert 級数は 1. また F_1 を Δ の唯一のファセットとすれば，F_1 は Δ の (長さ 1) のシェリングで，$G_1 = \emptyset$. $x_{G_1} = x_\emptyset = 1$ は $R = K$ の基底．これで $t=1$ の場合が示せた．

$t-1$ の場合に定理を仮定する．$F_1,\dots,F_t$ を Δ のシェリングとする．次の主張を示そう．

主張 任意の $i = 1,\dots,n$ について，$x_i x_{G_t} = 0$ が R で成立.

主張の証明　まず $x_i \notin F_t$ と仮定する．シェリング $F_1,\dots,F_{t-1}$ に F_t を加えることで得られる新しい面 F は $G_t \subseteq F \subseteq F_t$ を満たすから，$\{x_i\} \cup G_i$ は新しい面にはなりえない．つまり $\{x_i\} \cup G_i \notin \Delta$. 従って $k[\Delta]$ において $x_i x_{G_t} = 0$ であり，特に R において $x_i x_{G_t} = 0$.

次に $x_i \notin F_t$ と仮定する．以下の議論で

$$K[F_t] := K[\Delta]/(x_j; x_j \notin F_t) = K[x_j \mid x_j \in F_t]$$

と置く．性質 (P) より，任意のファセット F について $\psi_i := \theta_i|_F$ は KF を張る．よって θ_i 達の線形結合であって $\eta = x_i + \sum_{x_j\notin F_t} \alpha_j x_j$, $\alpha_j \in K$ と書けるものがある．すると R において $\eta = 0$ だから，

やはり R において

$$x_i x_{G_t} = (x_i - \eta)x_{G_t} = -(\sum_{x_j \notin F_t} \alpha_j x_j)x_{G_t} = 0$$

が成立する. 但し最後の等式は前半の議論の結果. □

$R' := R/(x_{G_t})$, $\Delta_{t-1} := \langle F_1, \ldots, F_{t-1} \rangle$ とする. G_t の定義から $K[\Delta_{t-1}] = K[\Delta]/(x_{G_t})$. 一方 Δ_{t-1} のファセットは Δ のファセットなので, 性質 (P) は $K[\Delta_{t-1}]$ でも成立. また $R' = K[\Delta_{t-1}]/(\theta_1, \ldots, \theta_d)$.

帰納法の仮定から $x_{G_1}, \ldots, x_{G_{t-1}}$ は R' を張る. 上の主張からイデアル $(x_{G_t}) \subset R$ の線形空間としての次元は高々 1. よって $x_{G_1}, \ldots, x_{G_t}$ は R を張る. □

12.10 Cohen-Macaulay 性の特徴づけ

ようやくこの節の冒頭に挙げた主定理が証明できる. それをもう一度書こう:

定理 12.25. 整数列 $h = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ に関する次の三条件は同値.

(a) $(d-1)$ 次元 Cohen-Macaulay 単体的複体 Δ が存在して $h = h(\Delta)$.

(b) $(d-1)$ 次元のシェラブルな単体的複体 Δ が存在して $h = h(\Delta)$.

(c) h は e ベクトル.

証明 (b) ⇒ (a) は定理 12.24, (a) ⇒ (c) は系 12.23 である. (c) ⇒ (b) を示そう.

与えられた e ベクトル h に対して, シェラブルな単体複体 Δ であって $h(\Delta) = h$ となるものを作りたい. $i = 0, 1, \ldots, d$ と $h_i \in \mathbb{N}$ に対して, 長さ i の正整数のマルチセットを逆辞書式順序で h_i 番目まで並べたものを $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_{h_i}^{(i)}$ と書く. 例えば $i = 3$, $h_3 = 8$ なら

$$(\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \ldots, \alpha_8^{(3)}) = (111, 112, 122, 222, 113, 123, 223, 133). \tag{12.10.1}$$

$\alpha_j^{(i)} = a_1 a_2 \cdots a_i$ だとして, それに対してマルチセット $\beta_j^{(i)}$ を次で定める.

$$\beta_j^{(i)} := \{1, 2, 3, \ldots, d-i, a_1 + d - i + 1, a_2 + d - i + 2, \ldots, a_i + d\}. \tag{12.10.2}$$

そしてこれらを並べたものを $\beta^{(i)} := (\beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_{h_i}^{(i)})$ と書く. 例えば (12.10.1) と $d = 5$ に対しては

$$\beta^{(3)} = (\beta_1^{(3)}, \ldots, \beta_8^{(3)}) = (12456, 12457, 12467, 12567, 12458, 12468, 12568, 12478).$$

$h = (h_0, \ldots, h_d)$ に対し上の要領で $\beta^{(0)}, \ldots, \beta^{(d)}$ を作り, それらを並べた列を $\sigma = (\beta^{(0)}; \ldots; \beta^{(d)})$ と書く. 例えば $d = 3$, $h = (1, 4, 2, 1)$ なら,

$$\sigma = (123; 124, 125, 126, 127; 134, 135; 234). \tag{12.10.3}$$

すると σ は長さ $m := \sum_{i=0}^{d} h_i = f_{d-1}(\Delta)$ の列で, 頂点集合が $\{1, 2, \ldots, h_i + d\}$ の $(d-1)$ 次元単体複体 Δ のシェリングを与える. (例えば (12.10.3) なら長さは $m = 1 + 4 + 2 + 1 = 8$.) $\sigma = (F_1, \ldots, F_m)$ と書き直すと, F_k が (12.10.2) で与えられる場合, 制限は $G_k = \{a_1 + d - i + 1, a_2 + d - i + 2, \ldots, a_i + d\}$ になる. よって i 元からなる制限 G_k は h_i 個あるので, $h(\Delta) = h$ となる. □

発表用問題 12.14. 式 (12.10.3) を確認せよ.

レポート問題 (締切: 8/06 13:00)

レポート問題 12. 多項式環 $K[V] = K[x_1, \ldots, x_n]$ を (12.5.1) で次数付き可換 K 代数 $K[V] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} K[V]_d$ とみなした時の Hilbert 級数 $L(K[V], t)$ を求めよ. (ヒント: 一変数の場合 (12.5.3).)

13 発表用問題の解答

§1 グラフ上の歩行

発表用問題 1.1 (問題文は 1.1). 前半の $|\binom{S}{k}|$ は, n 個のものから重複なしに k 個を選ぶ場合の数なので $|\binom{S}{k}| = {}_nC_k = \binom{n}{k}$.

後半の $|\left(\!\binom{S}{k}\!\right)|$ は, n 個のものから重複ありで k 個を選ぶ場合の数なので

$$|\left(\!\!\binom{S}{k}\!\!\right)| = {}_nH_k = \binom{n-1+k}{n-1}.$$

あるいは, 重複なしに a 種類 $(1 \leq a \leq k)$ を選び, 各種類は 1 個以上, 計 k 個選ぶ場合の数と考えると

$$\sum_{a=1}^{k} \binom{n}{a}\binom{k-1}{a-1} = \sum_{a=1}^{k} \binom{n}{n-a}\binom{k-1}{a-1}.$$

これら二つの式は, Chu-Vandermonde の恒等式

$$\binom{M+N}{L} = \sum_{b=0}^{\min(M,N)} \binom{N}{L-b}\binom{M}{b}$$

を $(L, M, N) = (n-1, k-1, n)$ に適用すると等しいことが分かる. この恒等式は,「$M+N$ 個のものから L 個を選ぶ場合の数は, M 個を青, N 個を赤と色付けすれば, 青を b 個, 赤を $L-b$ 個 $(0 \leq b \leq L)$ 選ぶ場合の数の b に関する和に等しい」と考えれば成立することが分かる (厳密な証明をつける事は練習問題にします).

発表用問題 1.2 (問題文は 1.2). 単純グラフの辺 $e \in E$ は頂点集合 V の異なる二点を端点に持ち, また端点を指定すれば対応する辺は一つしかない. 従って辺に端点を対応させる写像 φ は単射 $E \hookrightarrow \binom{V}{2}$ であり, これによって E は $\binom{V}{2}$ の部分集合と見なせる.

発表用問題 1.3 (問題文は 1.3). $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ と書くと, $A = UDU^{-1}$ と U が直交行列であることから $A^\ell = UD^\ell U^{-1} = UD^{\ell\,t}U$. D が対角行列であることに注意して (i,j) 成分を見ると, $(\boldsymbol{A}^\ell)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} (U)_{i,k}(D^\ell)_{k,k}({}^tU)_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} u_{i,k}\lambda_k^\ell u_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} c_k \lambda_k^\ell$.

発表用問題 1.4 (問題文は 1.4). $(\boldsymbol{A}^\ell)_{i,j}$ は頂点 i から頂点 j への長さ ℓ の歩行の数だから, $j = i$ の場合は始点を i とする長さ ℓ の閉歩行の数である. 従って $f_G(\ell) = \sum_{i=1}^{p} (\boldsymbol{A}^\ell)_{i,i} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^\ell)$. 一方で $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ と書くと, $A = UDU^{-1}$ より $\mathrm{tr}(A^\ell) = \mathrm{tr}(UD^\ell U^{-1}) = \mathrm{tr}(D^\ell) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^\ell$. 従って $f_G(\ell) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^\ell$.

§2 立方体グラフと Radon 変換

発表用問題 2.1 (問題文は 2.1). C_n の定義から, u と v に接続する辺がある $\iff$ ある $1 \leq i \leq n$ が存在して, 群 $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ において $(u-v)_j = \delta_{i,j} \iff (u+v)_j = \delta_{i,j} \iff U + v$ の成分に 1 が一つだけ存在する.

発表用問題 2.2 (問題文は 2.2)**.** 任意の集合 S に対して, S 上の $\mathbb{R}$ 値函数全のなす集合 F は次元 $|S|$ の実線形空間である. 実際, $f, g \in F$ に対して $(f+g)(s) := f(s) + g(s)$ で加法 $f+g$ を定めれば, F は可換群になる. また $c \in \mathbb{R}$ と $f \in F$ に対して $(cf)(s) := cf(s)$ とすればスカラー倍が定まる. この加法とスカラー倍が線形空間の公理を満たすことは簡単に確認できる. F の基底として, 例えば $\delta_s(t) := \delta_{s,t}$ で定まる $\delta_s \in F$ からなる部分集合 $\{\delta_s \mid s \in S\}$ がある. 特に $S = \mathbb{Z}_2^n$ なら次元は $|\mathbb{Z}_2^n| = 2^n$ である.

発表用問題 2.3 (問題文は 2.3)**.** 任意の $v \in \mathbb{Z}_2^n$ に対して $(\sum_u g(u) f_u)(v) = \sum_u g(u)\delta_{u,v} = g(v)$ となるので $g = \sum_u g(u) f_u$ である. これから $B_1 = \{f_u \mid u \in \mathbb{Z}_2^n$ が $\mathcal{V}$ を生成することが分かる. B_1 が一次独立であることは, $\sum_u c_u f_u = 0$ なる $c_u \in \mathbb{R}$ 達があったとすると, 各 $v \in \mathbb{Z}_2^n$ に対して $0 = (\sum_u c_u f_u)(v) = \sum_u c_u \delta_{u,v} = c_v$ となるので示せた.

発表用問題 2.4 (問題文は 2.4)**.** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の双線形性は明らか. 非退化性については, 任意の $g \in \mathcal{V}$ に対して $\langle f, g \rangle = 0$ ならば, $g = f_v$ として $0 = \langle f, f_v \rangle = \sum_u f(u) f_v(u) = \sum_u f(u)\delta_{u,v} = f(v)$. 従って任意の $v \in \mathbb{Z}_2^n$ に対して $f(v) = 0$ なので $f = 0$. 次に正値性については, 任意の $f \in \mathcal{V}$ について $\langle f, f \rangle = \sum_u f(u)^2 \geq 0$ で, 等式が成立するのは任意の $u \in \mathbb{Z}_2^n$ に対して $f(u) = 0$ の時, つまり $f = 0$ の時のみである.

発表用問題 2.5 (問題文は 2.5)**.** $y \cdot w = \sum_{i=1}^n y_i w_i$ から $(-1)^{y \cdot w} = \prod_{i=1}^n (-1)^{y_i w_i}$. 従って

$$\sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{y \cdot w} = \sum_{w_1 \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w_2 \in \mathbb{Z}_2} \cdots \sum_{w_n \in \mathbb{Z}_2} \prod_{i=1}^n (-1)^{y_i w_i} = \sum_{w_1 \in \mathbb{Z}_2} (-1)^{y_1 w_1} \cdot \sum_{w_2 \in \mathbb{Z}_2} (-1)^{y_2 w_2} \cdots \sum_{w_n \in \mathbb{Z}_2} (-1)^{y_n w_n}$$

$$= \prod_{i=1}^n \big((-1)^{y_i \cdot 0} + (-1)^{y_i \cdot 1} \big).$$

全ての y_i が 0 ならば $(-1)^{y_i \cdot 0} + (-1)^{y_i \cdot 1} = 2$ だから積は 2^n. そうでない場合, $y_i = 1$ となる i があって, そこでは $(-1)^{y_i \cdot 0} + (-1)^{y_i \cdot 1} = 0$ だから, 積は 0.

§3 ランダムウォーク

発表用問題 3.1 (問題文は 3.1)**.** 問題 2.1 より頂点 $u, v \in \mathbb{Z}_2^n$ に接続する辺があることと $u + v \in \mathbb{Z}_2^n$ の成分に $1 \in \mathbb{Z}_2$ が一つだけあることは必要十分. 従って頂点 u から出発して奇数回のステップで到達できる頂点 v について, $u + v \in \mathbb{Z}_2^n$ の成分に 1 は奇数個ある. 一方 $u + u = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_2^n$ だから, 奇数回で u に戻ることはない.

発表用問題 3.2 (問題文は 3.2)**.** 確率行列 $\boldsymbol{N}_r$ は隣接行列 $\boldsymbol{A}_r = \boldsymbol{A}(H_r)$ の各行を定数倍したのものだから, 可逆対角行列 D が存在して $\boldsymbol{N}_r = D\boldsymbol{A}_r$ と書ける. もし $\boldsymbol{N}_r$ が既約行列でないなら, 適当な置換行列 P が存在して $P\boldsymbol{N}_r P^{-1} = PD\boldsymbol{A}_r P^{-1}$ がブロック三角行列になる. 置換行列で変換することはグラフの頂点の番号を付け替えることに相当するから, このことはグラフ H_r の番号を付け替えると隣接行列がブロック三角行列になることを意味する. ところで隣接行列は対称行列だから, ブロック三角行列であればブロック対角行列である. これは H_r が連結であることと矛盾する.

発表用問題 3.3 (問題文は 3.3)**.** Peron-Frobenius の定理を転置行列 ${}^t\boldsymbol{N}_r$ に適用すると, 最大実固有

値 $\lambda_r > 0$ 及び全ての成分が正である固有ベクトル v が存在する. 元の行列 $\boldsymbol{N}_r$ と転置行列の固有値の集合は同じだから $\lambda_r = \rho_r$ である. よって $u := {}^t v$ とすれば良い.

発表用問題 3.4 (問題文は 3.4). $\boldsymbol{N}_r$ の成分は非負だから, 全ての $h = 1, \ldots, k$ に対して $\sigma_h = 0$ だと $\boldsymbol{N}_r = 0$ となり, 考えている連結グラフ H_r の頂点が二つ以上であることと矛盾する.

発表用問題 3.5 (問題文は 3.5). 収束性は (3.3.2) を用いると簡単に示せるので略す. 逆元であることは $(I-B)^2 \sum_{n=0}^{m} nB^{n-1} = I - (m+1)B^m + mB^{m+1}$ から分かる.

§4 Sperner 性

発表用問題 4.1 (問題文は 4.1). 略.

発表用問題 4.2 (問題文は 4.2). P は次数付きなので, 任意の $x \in P$ に対してある $i = 0, 1, \ldots, n$ があって $x \in P$. また $x \in P_i$ であることは x を最大元とする飽和鎖で長さ i のものがあることと同値だから, $j \neq i$ なら $x \notin P_j$. よって $P_i \cap P_j = \emptyset$.

発表用問題 4.3 (問題文は 4.3). $x \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $|x| = j$ ならば, $x = \{a_1, \ldots, a_j\}$ として, $k = 0, \ldots, j$ に対して $x_k := \{a_1, \ldots, a_k\}$ とすれば $x_0 = \emptyset < x_1 < \cdots < x_{j-1} < x_j$ は鎖. $|x| = j$ だからこれは飽和鎖. 従って $x \in (B_n)_j$. 逆に任意の $(B_n)_j$ の元 x は $|x| = j$ を満たす. 従って $(B_n)_j = \{x \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \mid |x| = j\}$. 残りの主張の証明は略.

発表用問題 4.4 (問題文は 4.4). 異なる $x, y \in P_j$ が比較可能なら, 長さが $j+1$ の鎖ができてしまって矛盾する. 従って P_j は反鎖.

発表用問題 4.5 (問題文は 4.5). Hasse 図において下行の頂点を左から $1, 2, 3$, 上行の頂点を $4, 5, 6$ と名付けて $A := \{1, 2, 5, 6\}$ とすると, $|A| = 4 > 3 = |P_0| = |P_1|$ で Sperner 性の条件を満たさない.

発表用問題 4.6 (問題文は 4.6). 線形写像 D_i と U_{i-1} の定義から, $x \in (B_n)_i$ に対して

$$U_{i-1} D_i(x) = U_{i-1}\Bigl(\sum_{|y|=i-1, y<x} y\Bigr) = \sum_{|y|=i-1, y<x} \sum_{|z|=i, z>y} z.$$

もし $z \in (B_n)_i$ が $|x \cap z| < i-1$ を満たすなら, $x, z \supset y$ となる $y \in (B_n)_{i-1}$ は存在しないので和に寄与しない. また $|x \cap z| = i-1$ を満たすなら, $x, z \subset y$ となる $y \in (B_n)_{i-1}$ は $y = x \cup z$ の一つのみ. そして $z = x$ なら $x \supset y$ となる任意の $y \in (B_n)_{i-1}$ が和に寄与して, そのような y は i 個ある. 従って

$$U_{i-1} D_i(x) = ix + \sum_{|z|=i,\, |x \cap z|=i-1} z.$$

§5 Boole 代数上の群作用

発表用問題 5.2 (問題文は 5.2). 写像 $x \mapsto \pi(x)$ は逆写像 $x \mapsto \pi^{-1}(x)$ を持つので全単射. また $\pi, \sigma \in G$ に対して $(\varphi(\pi\sigma))(x) = (\pi\sigma)(x) = \pi(\sigma(x)) = \varphi(\pi)(\varphi(\sigma)(x))$ なので $\varphi\colon G \to \mathfrak{S}_X$ は群準同型. 逆に群準同型 φ が与えられれば, $e(x) = (\varphi(e))(x) = \mathrm{id}_X(x) = x$ 及び $(\pi\sigma)(x) = (\varphi(\pi\sigma))(x) = (\varphi(\pi)\varphi(\sigma))(x) = (\varphi(\pi))(\varphi(\sigma)(x)) = (\varphi(\pi))(\sigma(x)) = \pi(\sigma(x))$ だから群作用が定まる.

発表用問題 5.3 (問題文は 5.3). $(1.1) \in G$ の作用は $(a, b, c, d) \mapsto (b, a, d, c)$ となる. よって (a, b, c, d) 全てを固定するのは単位元 $e \in G$ の作用だけなので, この群作用は忠実.

発表用問題 5.4 (問題文は 5.4)**.** $(1.1) \in G$ の作用は $(a,b,c,d) \mapsto (d,c,b,a)$ となる．よって (a,b,c,d) 全てを固定するのは単位元 $e \in G$ の作用だけなので, この群作用は忠実.

発表用問題 5.5 (問題文は 5.5)**.** 任意の $x \in X$ に対して $e(x) = x$ なので $x \sim x$. また $x, y \in X$ に対して $x \sim y$ ならば, $\pi(x) = y$ となる $\pi, \sigma \in G$ が存在して $\pi^{-1}(y) = x$ となるので $y \sim x$. そして $x \sim y$ かつ $y \sim z$ なら $\pi(x) = y$ 及び $\sigma(y) = z$ となる $\pi, \sigma \in G$ があるので, $(\pi\sigma)(x) = z$ より $x \sim z$.

発表用問題 5.6 (問題文は 5.6)**.** $x \sim y$ ならば $\pi(x) = y$ となる $\pi \in G$ が存在する．この時 $Gx = \{\sigma(x) \mid \sigma \in G\} = \{\sigma\pi^{-1}(y) \mid \sigma \in G\} = \{\rho(y) \mid \rho \in G\} = Gy$. 逆に $Gx = Gy$ ならば $y = e(y) \in Gy = Gx$ より $y = \pi(x)$ となる $\pi \in G$ が存在するので $x \sim y$.

発表用問題 5.7 (問題文は 5.7)**.** 問題 5.6 の主張そのものである.

発表用問題 5.8 (問題文は 5.8)**.** G 同値 $\sim$ により集合 X は $X = \sqcup_{c \in X/\sim} c$ と類別される．ここで同値類全体の集合 $X/\sim$ は問題 5.6, 5.7 より G 軌道全体の集合 X/G と一対一対応するから, $X = \sqcup_{Gx \in X/G} Gx$ が成立する.

発表用問題 5.9 (問題文は 5.9)**.** まず (5.2.1) の $\pi\colon B_n \to B_n$ は $\pi^{-1}\colon B_n \to B_n$ を逆写像に持つので全単射である．また $x, y \in B_n$ が $x \subseteq y$ を満たすならば, 定義 (5.2.1) から $\pi(x) \subseteq \pi(y)$ だから $\pi\colon B_n \to B_n$ は順序写像である．従って B_n の自己同型である.

発表用問題 5.10 (問題文は 5.10)**.** (5.2.2) の写像 $\varpi\colon \mathfrak{S}_n \to \mathrm{Aut}(B_n)$ が群準同型であることを示せばよい．定義 (5.2.1) より, $\pi, \sigma \in \mathfrak{S}_n$ について, 任意の $x \in B_n$ に対して $(\pi\sigma)(x) = \pi(\sigma(x))$. よって $\varpi(\pi\sigma) = \varpi(\pi)\varpi(\sigma)$.

発表用問題 5.11 (問題文は 5.11)**.** $\mathfrak{o} \in P/G$ に対して $x \in \mathfrak{o}$ を任意に取ると, P の半順序について $x \le x$ なので $\mathfrak{o} \le \mathfrak{o}$.

$\mathfrak{o}, \mathfrak{o}' \in P/G$ が $\mathfrak{o} \le \mathfrak{o}'$ かつ $\mathfrak{o}' \le \mathfrak{o}$ を満たせば, $x, y \in \mathfrak{o}$ と $x', y' \in \mathfrak{o}'$ が存在して, P の半順序について $x \le x'$ かつ $y' \le y$. 一方で x と y は同じ G 軌道 $\mathfrak{o}$ に属しているから, $\pi \in G$ が存在して $y = \pi(x)$. 同様に $\sigma \in G$ が存在して $x' = \sigma(y')$. G は半順序集合 P に作用しているから, $y' \le y$ より $\sigma(y') \le \sigma(y)$ となり, 従って $x \le x' = \sigma(y') \le \sigma(y) = \sigma\pi(x)$. G は有限群だから, $\sigma\pi \in G$ は有限位数．従って $x \le \sigma\pi(x) \le (\sigma\pi)^2(x) \le \cdots \le (\sigma\pi)^{-1}(x) \le x$, つまり $\sigma\pi(x) = x$. これと $x \le x' = \sigma(y') \le \sigma(y) = \sigma\pi(x)$ から $x = x'$, つまり $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}'$.

$\mathfrak{o}, \mathfrak{o}', \mathfrak{o}'' \in P/G$ が $\mathfrak{o} \le \mathfrak{o}'$ かつ $\mathfrak{o}' \le \mathfrak{o}''$ を満たせば, $x \in \mathfrak{o}$, $x', y' \in \mathfrak{o}$, $y'' \in \mathfrak{o}''$ が存在して P の半順序について $x \le x'$ かつ $y' \le y''$. $y' = \pi(x')$ となる $\pi \in G$ が存在するが, G が半順序集合 P に作用することから $\pi(x) \le \pi(x')$. 従って $\pi(x) \le \pi(x') = y' \le y''$ となるので $\mathfrak{o} \le \mathfrak{o}''$.

発表用問題 5.12 (問題文は 5.12)**.** $\overline{x}$ は $12 \cdots n = \{1, 2, \ldots, n\}$ における x の補集合だから, $x_k \in (B_n)_i \iff |x_k| = i \iff |\overline{x}_k| = n - i \iff \overline{x}_k \in (B_n)_{(n-i)}$. また $\{x_1, \ldots, x_k\}$ が G 軌道ならば $x_k = \pi(x_1)$ となる $\pi \in G$ があり, $\overline{x}_k = \pi(\overline{x}_1)$ となるので $\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k\}$ も G 軌道である．π の代わりに π^{-1} を用いれば, 同じ議論で逆も言える．従って $\{x_1, \ldots, x_k\} \in (B_n)_i/G$ と $\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k\} \in (B_n)_{(n-i)}/G$ は同値.

発表用問題 5.13 (問題文は 5.13)**.** $\pi(x) = \sigma(x)$ ならば $\sigma^{-1}\pi \in G_x$ だから $\sigma^{-1}\pi G_x = G_x$, つまり $\pi G_x = \sigma G_x$. 逆にたどれば $\Leftarrow$ も言える.

発表用問題 5.14 (問題文は 5.14). 群準同型 $f\colon \mathfrak{S}_M \to G$, $f(\pi) := \hat{\pi}$ が全単射であることを示せばよい. G の定義から $G = \operatorname{Im} f$, つまり f は全射である.

$\operatorname{Ker} f$ の元 π は, 任意の $i \neq j \in M$ に対して $[\pi.i, \pi.j] = [i, j]$ を満たす. $m = |M| \geq 3$ より, 特に $(i, j) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ とすると $(\pi.1, \pi, 2, \pi.3) = (1, 2, 3)$ となるしかない. $(1, 2, 3)$ の代わりに, 任意の $0 \leq k \leq m-3$ に対して $(k+1, k+2, k+3)$ を考えることで, 任意の $i \in M$ に対して $\pi.i = i$, つまり $\pi = e$ であることが分かる. 特に f は単射である. 以上で示せた.

発表用問題 5.15 (問題文は 5.15). マルチセット $\left(\!\binom{V}{2}\!\right)$ の元を $[i, j]$ $(i, j \in V)$ と書く. 写像 $f\colon V \to V'$ に対して $\left(\!\binom{f}{2}\!\right)\colon \left(\!\binom{V}{2}\!\right) \to \left(\!\binom{V'}{2}\!\right)$ を $\left(\!\binom{f}{2}\!\right)([i, j]) := [f(i), f(j)]$ で定義する. f が全単射であれば, その逆写像 $f^{-1}\colon V' \to V$ から $\left(\!\binom{f^{-1}}{2}\!\right)\colon \left(\!\binom{V'}{2}\!\right) \to \left(\!\binom{V}{2}\!\right)$ を定めれば, それが $\left(\!\binom{f}{2}\!\right)$ の逆写像になるので, $\left(\!\binom{f}{2}\!\right)$ は全単射である.

発表用問題 5.16 (問題文は 5.16). a が strongly concave $\iff$ $a_i^2/\binom{n}{i}^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}/\left(\binom{n}{i-1}\binom{n}{i+1}\right)$ と $\binom{n}{i}^2/\left(\binom{n}{i-1}\binom{n}{i+1}\right) = \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n}{i-1}}\frac{\binom{n}{i}}{\binom{n}{i+1}} = \frac{n-i+1}{i}\frac{i+1}{n-i} = \frac{i+1}{i}\frac{n-i+1}{n-i}$ より前半が従う. 後半は $(1+\frac{1}{i})(1+\frac{1}{n-i}) \geq 1$ から従う.

§6 Young 図形と q 二項定理

発表用問題 6.1 (問題文は 6.1). $\lambda \in L(m, n)$ に対応する Young 図形について, 最下行の右端の箱からひとつづつ削っていくことで λ から始まる極大鎖が得られる. 式で書くと, λ の長さを ℓ として,

$$\begin{aligned}
&\lambda^{(0)} := \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}, \lambda_l), \quad \lambda^{(1)} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}, \lambda_l - 1), \ \ldots, \ \lambda^{(\lambda_l - 1)} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}, 1),\\
&\lambda^{(\lambda_l)} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}, 0) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}), \quad \lambda^{(\lambda_l + 1)} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1} - 1), \ \ldots,\\
&\lambda^{(\lambda_l + \cdots + \lambda_2 - 1)} := (\lambda_1, 1), \quad \lambda^{(\lambda_l + \cdots + \lambda_2)} := (\lambda_1, 0) = (\lambda_1), \quad \ldots, \quad \lambda^{(|\lambda| - 1)} := (1), \quad \lambda^{(|\lambda|)} := (0) = \emptyset
\end{aligned}$$

とすれば, これらはすべて $L(m, n)$ の元で $\emptyset = \lambda^{(|\lambda|)} \lessdot \lambda^{(|\lambda|-1)} \lessdot \cdots \lessdot \lambda^{(1)} \lessdot \lambda^{(0)} = \lambda$ となるから, この列は極大鎖である. 従って λ の階数は $|\lambda|$.

発表用問題 6.2 (問題文は 6.2). k に関する帰納法で簡単に示せる.

発表用問題 6.3 (問題文は 6.3). $m^{\downarrow d} := m(m-1)\cdots(m-d+1)$ と略記すると

$$(mn)! = (mn)^{\downarrow n} \cdot (mn-n)^{\downarrow n} \cdots n^{\downarrow n} \geq mn^{\downarrow n} \cdot (m-1)n^{\downarrow n} \cdots n^{\downarrow n} = (n^{\downarrow n})^m m! = (n!)^m m!.$$

§7 群作用がある場合の数え上げ

発表用問題 7.1 (問題文は 7.1). $X := n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n$ とする. $\bmod 2$ で $n^2 \equiv n$ だから $X \equiv 3n(n+1) \equiv 0$. $\bmod 3$ で $n^3 \equiv n$ だから $X \equiv 3n(n+1) \equiv 0$. よって $\bmod 6$ で $X \equiv 0$.

発表用問題 7.2 (問題文は 7.2). G の単位元を e_G と書くと, 任意の $f \in F$ と $x \in X$ に対して $(e_G.f)(x) = f(e_G^{-1}.x) = f(x)$ より $e_G.f = f$. また任意の $\pi, \pi' \in G$, $f \in F$ と $x \in X$ に対して $\bigl(\pi.(\pi', f)\bigr)(x) = (\pi'.f)\bigl(\pi^{-1}(x)\bigr) = f\bigl((\pi')^{-1}\pi^{-1}(x)\bigr) = f\bigl((\pi\pi')^{-1}(x)\bigr) = ((\pi\pi').f)(x)$.

発表用問題 7.3 (問題文は 7.3). 左作用は定まらない. 実際, $\bigl(\pi\cdot(\pi'\cdot f)\bigr)(x) = (\pi'\cdot f)(\pi.x) = f(\pi'.\pi.x)$ と $\bigl((\pi\pi')\cdot f)\bigr)(x) = f(\pi\pi'.x)$ は一致しない.

発表用問題 7.4 (問題文は 7.4)**.** $k=-1$ の場合を示せば, $|k|>1$ の場合は帰納法で示せる. $k=-1$ の場合は $\pi^{-1}\pi=e_G$ の作用が恒等的であることから示せる.

発表用問題 7.5 (問題文は 7.5)**.** π の長さが n であることから従う.

発表用問題 7.6 (問題文は 7.6)**.** $\pi\in\mathfrak{S}_n$ がサイクルの積で $\pi=\sigma_1\cdots\sigma_l$ と書けると仮定すると, 共役元 $\rho=g\pi g^{-1}$, $g\in\mathfrak{S}_n$ は $\rho=\sigma_1'\cdots\sigma_l'$, $\sigma_k':=g\sigma_k g^{-1}$ と書ける. σ_k と σ_k' の長さは等しいから $\mathrm{type}(\pi)=\mathrm{type}(\rho)$. 逆に π と ρ のサイクルタイプが等しければ, $\pi=\sigma_1\cdots\sigma_l$, $\rho=\sigma_1'\cdots\sigma_l'$ かつ σ_k と σ_k' の長さは等しいように書ける. すると適当な $g\in\mathfrak{S}_n$ を用いて $\sigma_k'=g\sigma_k g^{-1}$ となるから $\rho=g\pi g^{-1}$.

発表用問題 7.7 (問題文は 7.7)**.** 結合則について.

$$\begin{aligned}\big((h_1,n_1)*(h_2,n_2)\big)*(h_3,n_3)&=(h_1h_2,n_1\varphi_{h_1}(n_2))*(h_3,n_3)=\big(h_1h_2h_3,n_1\varphi_{h_1}(n_2)\varphi_{h_1h_2}(n_3)\big),\\(h_1,n_1)*\big((h_2,n_2)*(h_3,n_3)\big)&=(h_1,n_1)*(h_2h_3,n_2\varphi_{h_2}(n_3))=\big(h_1h_2h_3,n_1\varphi_{h_1}(n_2\varphi_{h_2}(n_3))\big)\end{aligned}$$

より $n_1\varphi_{h_1}(n_2)\varphi_{h_1h_2}(n_3)=n_1\varphi_{h_1}(n_2\varphi_{h_2}(n_3))$ を示せば十分. それは

$$n_1\varphi_{h_1}(n_2)\varphi_{h_1h_2}(n_3)\overset{*1}{=}n_1\varphi_{h_1}(n_2)\cdot\varphi_{h_1}(\varphi_{h_2}(n_3))\overset{*2}{=}n_1\varphi_{h_1}(n_2\varphi_{h_2}(n_3))$$

と示せる. ここで $*1$ では, φ が群準同型なので $\varphi_{h_1h_2}=\varphi_{h_1}\varphi_{h_2}$ となることを用いた. また $*2$ では, $\varphi_{h_1}\in\mathrm{Aut}(N)$ も群準同型なので $\varphi_{h_1}(nn')=\varphi_{h_1}(n)\cdot\varphi_{h_1}(n')$ となることを用いた.

単位元は (e_H,e_N) である. 実際, $\varphi_{e_H}=\mathrm{id}_N$ から

$$(e_H,e_N)*(h,n)=(h,e_N\cdot\varphi_{e_H}(n))=(h,e_N\cdot n)=(h,n)$$

となり, また $\varphi_h(e_N)=e_N$ から

$$(h,n)*(e_H,e_N)=(h,n\cdot\varphi_h(e_N))=(h,n\cdot e_N)=(h,n)$$

となる. これで単位元であることが示せた.

逆元は $(h,n)^{-1}=(h^{-1},\varphi_h^{-1}(n^{-1}))$ となる. ここで $\varphi_h^{-1}\in\mathrm{Aut}(H)$ は $\varphi_h\in\mathrm{Aut}(H)$ の逆写像. 実際,

$$(h,n)*(h^{-1},\varphi_h^{-1}(n^{-1}))=\big(e_H,n\cdot\varphi_h(\varphi_h^{-1}(n^{-1}))\big)=(e_H,n\cdot n^{-1})=(e_H,e_N)$$

および

$$\begin{aligned}(h^{-1},\varphi_h^{-1}(n^{-1}))*(h,n)&=\big(e_H,\varphi_h^{-1}(n^{-1})\cdot\varphi_{h^{-1}}(n)\big)\overset{*3}{=}\big(e_H,\varphi_h^{-1}(n^{-1})\cdot\varphi_h^{-1}(n)\big)\\&=\big(e_H,\varphi_h^{-1}(n^{-1}n)\big)=(e_H,e_N)\end{aligned}$$

が成り立つ. 但し $*3$ で $\varphi_h^{-1}=\varphi_{h^{-1}}$ を用いた.

発表用問題 7.8 (問題文は 7.8)**.** 任意の $h\in H$ に対し $\varphi_h=\mathrm{id}_N$ なので,

$$(h_1,n_1)*(h_2,n_2)=(h_1h_2,n_1\varphi_{h_1}(n_2))=(h_1h_2,n_1n_2)$$

となり, 直積群における積になっている. よって $H\ltimes_{\mathrm{id}}N\simeq H\times N$.

発表用問題 7.9 (問題文は 7.9). 問題のように $H' := \{(h, e_N) \mid h \in H\}$, $N' := \{(e_H, n) \mid n \in N\}$ とする. これらが部分群であることは明らか.

(1) $(h, e_N) \cdot (h', e_N) = (hh', e_N)$, $(h, e_N)^{-1} = (h^{-1}, e_N)$ より写像 $H \to H'$, $h \mapsto (h, e_N)$ は群の同型写像. よって $H' \sim H$.

(2) $(e_H, n) \cdot (e_H, n') = (e_H, nn')$, $(e_H, n)^{-1} = (e_H, n^{-1})$ より写像 $H \to H'$, $h \mapsto (h, e_N)$ は群の同型写像. よって $H' \sim H$. また $(h, n)^{-1}(e_H, n')(h, n) = (h, n)^{-1}(h, n'n) = (h^{-1}, \varphi_h^{-1}(n^{-1})(h, n'n) = \big(e_H, \varphi_h^{-1}(n^{-1})\varphi_{h^{-1}}(n'n)\big)$ より $H' \triangleleft G$ となる.

(3) 任意の $(h, n) \in G$ は $(h, n) = (e_H, n)(h, e_H) \in N'H'$ と書けるので $G = N'H'$ である. また $N' \cap H' = \{(e_N, e_H)\} = \{e_G\}$.

発表用問題 7.10 (問題文は 7.10). $C = \{r_1, \ldots, r_n\}$ とすると, $F_{\mathfrak{S}_l}(C)$ の定義 (7.5.2) から

$$\sum_{l\geq 0} x^l F_{\mathfrak{S}_l}(C) = \sum_{l\geq 0} \sum_{i_1+i_2+\cdots+r_n=l} (xr_1)^{i_1}(xr_2)^{i_2}\cdots(xr_n)^{i_n} = \sum_{i_1\geq 0}\sum_{i_2\geq 0}\cdots\sum_{i_n\geq 0}(xr_1)^{i_1}(xr_2)^{i_2}\cdots(xr_n)^{i_n}$$

$$= \sum_{i_1\geq 0}(xr_1)^{i_1}\sum_{i_2\geq 0}(xr_2)^{i_2}\cdots\sum_{i_n\geq 0}(xr_n)^{i_1} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-xr_k}.$$

発表用問題 7.11 (問題文は 7.11). $\frac{1}{1-x} = \exp(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}x^n)$ を示せばよい. $g(x) := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}x^n$ と書くと, $g'(x) = \sum_{n\geq 1}x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. よって $g(x) = \int g'(x)dx$ は $-\log(1-x)$ と等しい. つまり $\exp g(x) = \frac{1}{1-x}$.

§8 Young 盤

発表用問題 8.1 (問題文は 8.1). $\lambda = (n)$ の場合は左から $n, n-1, \ldots, 1$ と書き込むしか方法がないので $f^{(n)} = 1$. $\lambda = (1^n)$ の場合は上から $n, n-1, \ldots, 1$ と書き込むしか方法がないので $f^{(1^n)} = 1$.

発表用問題 8.2 (問題文は 8.2). $\alpha(U^n, \lambda)$ は Young 束上で $\emptyset$ から $|\lambda| = n$ ステップで λ に到達する道の数である. そのような道に対して i ステップ目に数字 i を書くことで, 道と λ を枠とする標準 Young 盤と一対一に対応することが分かる. 従って $\alpha(U^n, \lambda) = f^\lambda$.

$\alpha(D^nU^n, \emptyset)$ は $\emptyset$ から n ステップで n の分割 λ に到達し, 続いて n ステップで $\emptyset$ に戻る道の数を λ について足し上げたものだから, 前半の結果より $\alpha(D^nU^n, \emptyset) = \sum_{|\lambda|=n}(f^\lambda)^2$.

発表用問題 8.3 (問題文は 8.3). 各整数 $i = 1, \ldots, n$ に対して分割 λ^i を以下の様に定める.

- $1 \leq i \leq r_1$ なら $\lambda^i := (i)$.
- $r_1 < i \leq r_1 + s_1$ なら $\lambda^i := (2r_1 - i)$.
- $r_1 + s_1 < i \leq r_1 + s_1 + r_2$ なら $\lambda^i := (i - 2s_1)$.
- $r_1 + s_1 + r_2 < i \leq r_1 + s_1 + r_2 + s_2$ なら $\lambda^i := (2r_1 + 2r_2 - i)$.

あとは同様で,

- $r_1 + s_1 + \cdots + r_j + s_j < i \leq r_1 + s_1 + \cdots + s_j + r_{j+1}$ なら $\lambda^i := (i - 2s_1 - \cdots - 2s_j)$.
- $r_1 + s_1 + \cdots + s_j + r_{j+1} < i \leq r_1 + s_1 + \cdots + r_{j+1} + s_{j+1}$ なら $\lambda^i := (2r_1 + \cdots + 2r_{j+1} - i)$.

すると仮定の条件 $\sum_{i=1}^{j}(r_i - s_i) \geq 0$ から各 λ^i は確かに分割. これらは一行型の Young 図形だか

ら, λ^i を枠とする Young 盤が一通りに定まる (解答 8.1). これで得られる Young 盤の列に対応した Young 束上の歩行の型は w である.

発表用問題 8.4 (問題文は 8.4). 定理 8.4 を $w = D^n U^n$, $\lambda = \emptyset$ に適用する. $S_w = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ であり, $n + j \in S_w$ に対して $a_{n+j} = j - 1$, $b_{n+j} = n$ だから, $\prod_{i \in S_w}(b_i - a_i) = n!$. また $f_\emptyset = 1$ だから, 定理 8.4 より $\alpha(D^n U^n, \emptyset) = n!$. これと問題 8.2 後半から結論が従う.

発表用問題 8.5 (問題文は 8.5). 分割 $\lambda = (l_1^{m_1}, \ldots, l_r^{m_r})$ の Young 図形は長方形 $m_1 \times l_1, \ldots, m_r \times l_r$ を上から並べたものである. $U_i(\lambda)$ はこれに箱を一つ付け加えてできる Young 図形の和であり, 付け加えることのできる場所は各長方形の右上, 及び最下行の下, 計 $r + 1$ 個ある. 付け加えてできる Young 図形は各々異なるから, $U_i(\lambda)$ が $r + 1$ 項の和であることが従う.

$D_i(\lambda)$ は箱を一つ取り除いてできる Young 図形の和であり, 取り除ける場所は各長方形の右下で, 計 r 個ある. 得られる Young 図形は各々異なるから, $D_i(\lambda)$ が r 項の和であると分かる.

発表用問題 8.6 (問題文は 8.6). $w = D^{s_k} U^{r_k} \cdots D^{s_1} U^{s_1}$ として, k に関する帰納法で示す. $k = 0$ の時は自明. 次に $k - 1$ 以下で定理が成立すると仮定する. $w = D^{s_k} U^{r_k} v$ と書くと, (8.3.8) と帰納法の仮定より

$$r_{n,0}(w) = (n+1) \cdots (n+s_k) r_{n+s_k,0}(v) = (n+1) \cdots (n+s_k) \prod_{i \in S_v} (b_i - a_i).$$

ここで $a^v := \sum_{j=1}^{k-1} s_j$, $b^v := \sum_{j=1}^{k-1} r_j$, $|v| := a^v + b^v + r_k$ と書くと, $S_w = S_v \sqcup \{j + |v| \mid j = 1, \ldots, s_k\}$, $a_{j+|v|} = a^v + j - 1$, $b_{j+|v|} = b^v + r_k$. これらと $a^v - b^v + r_k - s_k = n$ から

$$(n+1) \cdots (n+s_k) \prod_{i \in S_v} (b_i - a_i) = \prod_{i \in S_w} (b_i - a_i).$$

よって k の時も成立する.

§12 可換環と組み合わせ論

発表用問題 12.1 (問題文は 12.1). f_{d-1} は Δ のファセットの数だから (仮定 $\Delta \neq \emptyset$ より) $f_{d-1} > 0$. ファセットの一つを $F = \{v_1, \ldots, v_d\}$ とすると, その部分集合 $F_i := \{v_1, \ldots, v_i\}$ $(i = 0, \ldots, d)$ は次元 $i - 1$ で $F_i \in \Delta$ だから $f_{i-1} > 0$.

発表用問題 12.2 (問題文は 12.2). 右辺は $M := \{1, 2, \ldots, m+1\}$ の i 元部分集合 S の総数. 一方, $I := \{1, 2, \ldots, i\}$ として $j := \#(S \cap I)$ に注目すると, S の総数は $\sum_{j=0}^{i} \#\binom{I}{j} \#\binom{M \setminus I}{i-j} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \binom{m-i+j}{i-j}$, つまり左辺になる.

発表用問題 12.3 (問題文は 12.3). $\dim \Delta = 1 = d - 1$ でファセットの数は $f_1 = \#\{ab, bc, cd, da\} = 4$. 以下 $j = 0, 1, \ldots, 3$ について Δ_j を調べ, 制限 G_{j+1} が一意に定まることを確認する.

$\Delta_0 = \emptyset$, $\langle ab \rangle = \{ab, a, b, \emptyset\}$ なので $G_1 = \emptyset$.

$\Delta_1 = \langle ab \rangle = \{ab, a, b, \emptyset\}$, $\langle bc \rangle = \{bc, b, c, \emptyset\}$ なので $\langle bc \rangle \setminus \Delta_1 = \{bc, c\}$ となり $G_2 = c$.

$\Delta_2 = \langle ab, bc \rangle = \{ab, bc, a, b, c, \emptyset\}$, $\langle cd \rangle = \{cd, c, d, \emptyset\}$ より $\langle cd \rangle \setminus \Delta_2 = \{cd, d\}$ となって $G_3 = d$.

$\Delta_3 = \langle ab, bc, cd \rangle = \{ab, bc, cd, a, b, c, d, \emptyset\}$, $\langle da \rangle = \{da, d, a, \emptyset\}$ より $\langle da \rangle \setminus \Delta_3 = \{da\}$ で $G_4 = da$.

以上より ab, bc, cd, da はシェリング順序.

発表用問題 12.4 (問題文は 12.4). $\dim\Delta = 2 = d-1$ でファセットの数は
$f_2 = \#\{abc, abd, bce, acf, bde, cef, adf, def\} = 8$. 以下 $j = 0, 1, \ldots, 7$ について Δ_j を調べ, 制限 G_{j+1} が与式のようになることを確認する.

$\Delta_0 = \emptyset$, $\langle abc\rangle = \{abc, ab, bc, ca, a, b, c, \emptyset\}$ なので $G_1 = \emptyset$.

$\Delta_1 = \langle abc\rangle$, $\langle abd\rangle = \{abd, ab, bd, da, a, b, d, \emptyset\}$ なので $\langle abd\rangle \setminus \Delta_1 = \{abd, bd, da, d\}$ となり $G_2 = d$.

$\Delta_2 = \langle abc, abd\rangle$, $\langle bce\rangle \setminus \Delta_2 = \{bce, ce, eb, e\}$ なので $G_3 = e$.

$\Delta_3 = \langle abc, abd, bce\rangle$, $\langle acf\rangle \setminus \Delta_3 = \{acf, cf, fa, f\}$ なので $G_4 = f$.

$\Delta_4 = \langle abc, abd, bce, acf\rangle$, $\langle bde\rangle \setminus \Delta_4 = \{bde, de\}$ なので $G_5 = de$.

$\Delta_5 = \langle abc, abd, bce, acf, bde\rangle$, $\langle cef\rangle \setminus \Delta_5 = \{cef, ef\}$ なので $G_6 = ef$.

$\Delta_6 = \langle abc, abd, bce, acf, bde, cef\rangle$, $\langle adf\rangle \setminus \Delta_6 = \{adf, df\}$ なので $G_7 = df$.

$\Delta_7 = \langle abc, abd, bce, acf, bde, cef, adf\rangle$, $\langle def\rangle \setminus \Delta_7 = \{def\}$ なので $G_8 = def$.

以上より確認できた.

発表用問題 12.5 (問題文は 12.5). $I := (a_1, \ldots, a_r) = a_1R + \cdots + a_rR$ と書く. $0, 1 \in R$ より $a_i \in I$ である. また I がイデアルであることは簡単に確認できる. 次にイデアル $J \subset R$ が $a_i \in J$ を満たすとする. イデアルの定義から, 任意の $s_1, \ldots, s_k \in J$ について $s_1R + \cdots + s_kR \subset J$. 特に $I = a_1 + \cdots + sa_rR \subset J$. よって I は a_i 達を含むイデアルのうち最小のものである.

発表用問題 12.6 (問題文は 12.6). $f, g, h \in R$ を任意に取る. $f - f = 0 \in I$ より $f \sim_I f$. $f \sim_I g$ なら $f - g \in I$ で, $g - f$ は $f - g \in I$ の逆元だから $g - f \in I$, つまり $g \sim_I f$. $f \sim_i g$ かつ $g \sim_I h$ なら $f - g, g - h \in I$ より $f - h = (f-g) + (g-h) \in I$ なので $f \sim_I h$.

発表用問題 12.7 (問題文は 12.7). $g \in R$ に対して $f \sim_I g \iff g - f \in I \iff$ ある $a \in I$ が存在して $g = f + a \iff g \in f + I$.

発表用問題 12.8 (問題文は 12.8). 任意の $f \in R$ に対して $(f+I)+(0+I) = (0+I)+(f+I) = f+I$ なので, $I = 0+I$ が零元. また $(f+I)+(-f+I) = (-f+I)+(f+I) = I$ なので, $-f+I$ が $f++I$ の逆元.

発表用問題 12.9 (問題文は 12.9). $R_n := \mathbb{C}[x]/(x^n)$ と書く. $n = 0$ の場合は $(x^0) = (1) = \mathbb{C}[x]$ なので $R_0 = 0$ (零環). $n = 1$ の場合は $(x^1) = (x) = x\mathbb{C}[x]$ なので $R_1 = \mathbb{C}$ (複素数体). $n = 2$ の場合は $(x^2) = x^2\mathbb{C}[x]$ なので $R_2 = \mathbb{C} + \mathbb{C}x$. 和は $\mathbb{C}$ 線形空間としての和と一致する. 積は $a + bx, c + dx \in R_2$ に対して $(a+bx)(c+dx) = ac + (ad+bc)x$.

発表用問題 12.10 (問題文は 12.10). 任意の $f, g \in R$ に対して $\varphi(f+g) = f+g+I = (f+I)+(g+I) = \varphi(f)+\varphi(g)$ 及び $\varphi(fg) = fg+I = (f+I)(g+I) = \varphi(f)\varphi(g)$ となるので φ は環準同型.

発表用問題 12.11 (問題文は 12.11). 恒等写像 $\mathrm{id}_R\colon R \to R$ は環同型なので $R \simeq R$. $R \simeq S$ なら環同型 $\varphi\colon R \to S$ があるが, その逆写像 $\varphi^{-1}\colon S \to R$ も環同型なので $S \simeq R$. $R \simeq S$ かつ $S \simeq T$ なら環同型 $\varphi\colon R \to S$ 及び $\psi\colon S \to T$ があるが, 合成 $\psi \circ \phi\colon R \to T$ も環同型なので $R \simeq T$.

発表用問題 12.12 (問題文は 12.12). $\operatorname{Ker}\varphi = I$.

発表用問題 12.13 (問題文は 12.13). $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して $x^a := x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ と書く. $\operatorname{supp}(a) \notin \Delta$ ならば $x^a \in I_\Delta$ は明らか. x^a 達が生成するイデアルを $J := (x^a \mid \operatorname{supp}(a) \notin \Delta)$ と書くと, 問題 12.5 より $J \subset I_\Delta$. $J \subsetneq I_\Delta$ と仮定すると, $x_S \in I_\Delta \setminus J$ を $x_S = x^a$ と書けば $\operatorname{supp}(a) \notin \Delta$ と

なって矛盾する. 最後に, $a \neq b$ ならば $x^a \neq x^b$ なので, x^a 達は $J = I_\Delta$ の基底である.

発表用問題 12.14 (問題文は 12.14)**.** $i = 0$, $h_0 = 1$ については $\alpha_1^{(0)} = \emptyset$, $\beta^{(0)} = (\beta_1^{(0)}) = (123)$.

$i = 1$, $h_1 = 4$ については $(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}, \alpha_4^{(1)}) = (1, 2, 3, 4)$ より $\beta^{(1)} = (\beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \beta_3^{(1)}, \beta_4^{(1)}) = (124, 125, 126, 127)$.

$i = 2$, $h_1 = 2$ については $(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}) = (11, 12)$ より $\beta^{(2)} = (\beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}) = (134, 135)$.

$i = 3$, $h_1 = 1$ については $(\alpha_1^{(3)}) = (111)$ より $\beta^{(3)} = (\beta_1^{(3)}) = (234)$.

14 レポート問題の解答

レポート問題 1 (問題文 1)**.** 隣接行列を $\boldsymbol{A}(G) = [a_{i,j}]$ と成分を書き, また最大固有値 λ_1 の固有ベクトルを列ベクトルとして ${}^t[e_1\ e_2\ \cdots\ e_p]$ と書く. 必要なら定数倍することで, この固有ベクトルの長さが 1, つまり $\sum_{k=1}^{p} e_k^2 = 1$ と仮定してよい. 固有ベクトルであることから, 任意の $i = 1, 2, \ldots, p$ に対して $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} e_j = \lambda_1 e_i$. すると Cauchy-Schwarz の不等式と長さ 1 の仮定から

$$\lambda_1^2 e_i^2 \le \Big(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{p} e_j^2\Big) = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}^2.$$

この不等式を i について足して, 再び長さ 1 の仮定を用いると

$$\lambda_1^2 \le \sum_{i,j=1}^{p} a_{i,j}^2. \tag{14.0.1}$$

ここで Δ の定義を思い出すと, 各 $i = 1, 2, \ldots, p$ に対して $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \le \Delta$. 一方, 成分 $a_{i,j}$ は全て非負だから $\sum_{i,j=1}^{p} a_{i,j}^2 \le (\sum_{j=1}^{p} a_{i,j})^2$ となり, 併せて $\sum_{i,j=1}^{p} a_{i,j}^2 \le \Delta^2$. すると (14.0.1) から

$$\lambda_1^2 \le \sum_{i,j=1}^{p} a_{i,j}^2 \le \Delta^2, \quad \text{つまり}\ \lambda_1 \le \Delta.$$

レポート問題 2 (問題文 2)**.** 式 (2.3.4) の $(\boldsymbol{A}^\ell)_{u,v} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}(n-2i)^\ell \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}$ で $k=1$ とすれば

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{u,v} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}(n-2i)^\ell\left[\binom{1}{0}\binom{n-1}{i} - \binom{1}{1}\binom{n-1}{i-1}\right] = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}(n-2i)^\ell\left[\binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{i-1}\right]$$

ここで $\binom{n-1}{i-1} = \frac{i}{n-i}\binom{n-1}{i}$ なので

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}(n-2i)^\ell\binom{n-1}{i}\Big(1-\frac{i}{n-i}\Big) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{(n-2i)^{\ell+1}}{n-i}\binom{n-1}{i}.$$

但し $\frac{1}{n-i}\binom{n-1}{i} = \frac{(n-1)!}{i!(n-i)!}$ の意味で, 特に $i=n$ の場合は $\frac{(n-1)!}{n!0!} = \frac{1}{n}$ と見なす.

レポート問題 3 (問題文 3)**.** ℓ が奇数なので, 任意の $i = 0, 1, \ldots, n$ について

$$\binom{n}{i}(n-2i)^\ell + \binom{n}{n-i}\big(n-2(n-i)\big)^\ell = \binom{n}{i}\big((n-2i)^\ell - (n-2i)^\ell\big) = 0.$$

よって

$$2\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-2i)^\ell = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-2i)^\ell + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{n-i}\big(n-2(n-i)\big)^\ell = 0.$$

レポート問題 4 (問題文 4). (1) P は有限集合なので, 全単射のなす群 $\mathfrak{S}_P$ は有限群. 特に $f \in \mathfrak{S}_P$ は有限位数, つまり $f^n = \mathrm{id}_P$ となる $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ がある. すると逆写像は $f^{-1} = f^{n-1}$. 一方, $x \leq y$ ならば $f(x) \leq f(y)$ であることを繰り返し用いて $f^{n-1}(x) \leq f^{n-1}(y)$. 従って $f^{-1}(x) \leq f^{-1}(y)$.

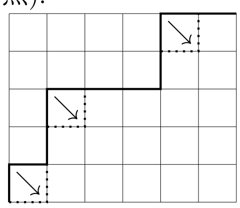
(2) $P = \mathbb{Z}$, $x \preccurlyeq y$ を $x = y$ または (x と y が正かつ通常の順序で $x \leq y$) で定義すれば半順序になる. $f(x) := x + 1$ は全単射で順序 $\preccurlyeq$ を保つ. しかし逆写像 $f^{-1}(x) = x - 1$ は, $1 \preccurlyeq 2$ について, $f^{-1}(1) = 0$ と $f^{-1}(2) = 1$ は比較できないので順序を保たない.

レポート問題 5 (問題文 5). ヒントに従うと, (5.2.2) の写像 $\varpi\colon \mathfrak{S}_n \to \mathrm{Aut}(B_n)$ が全単射であることを言えばよい. $\rho\colon \mathrm{Aut}(B_n) \to \mathfrak{S}_n$ を以下のように定める. まず各元 $\sigma \in \mathrm{Aut}(B_n)$ の作用で $(B_n)_1 \subset B_n$ も不変であることに注意する. 実際, 各 $\{i\} \in (B_n)_1$ は $\emptyset$ のみを真部分集合とするので, その σ による像も $(B_n)_1$ の元でなければならない. 従って $\sigma(\{i\}) = \{j\}$ となる $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ が各 i に対して定まる. また $12\cdots n = \{1, 2, \ldots, n\} \in (B_n)_n \subset B_n$ が不変であることに注意する. 実際, $12\cdots n$ は B_n の最大元だから, 順序写像である σ による像も最大元になる. 従って, $j = \rho_\sigma(i)$ と書くと ρ_σ は n 文字の置換, つまり $\mathfrak{S}_n$ の元である. 対応 $\sigma \mapsto \rho_\sigma$ でもって写像 $\rho\colon \mathrm{Aut}(B_n) \to \mathfrak{S}_n$ が定まる. 定義の仕方から ρ が ϖ の逆写像であることは直ぐに従う.

レポート問題 6 (問題文 6). $j^{\downarrow i} := j(j-1)\cdots(j-i+1)$ と略記する. 以下の計算から従う.

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= \sum_{j \geq i-1} \binom{n}{j} j^{\downarrow(i-1)} a_j x^{j-i+1}, \quad R(x) = \sum_{j \geq i-1} \binom{n}{j} j^{\downarrow(i-1)} a_j x^{n-j}, \\
S(x) &= \sum_{j=i-1}^{i+1} \binom{n}{j} j^{\downarrow(i-1)} (n-j)^{\downarrow(n-i-1)} a_j x^{i+1-j} = \sum_{j=i-1}^{i+1} \frac{n!}{(j-i+1)!(i+1-j)!} a_j x^{i+1-j} \\
&= \frac{n!}{2} a_{i-1} x^2 + n! a_i x + \frac{n!}{2} a_{i+1}.
\end{aligned}
$$

レポート問題 7 (問題文 7). 命題 6.3 の証明のように $L(m, n)$ の元と折れ線を対応させて考える. $\lambda \in L(m, n)$ を固定すると, $\lambda \lessdot \mu$ となる μ は, λ に対応する折れ線で北西角を南東角に取り換えることに対応する (下図参照).



$L(5, 6) \ni \lambda = (4, 4, 1, 1)$
$\lambda \lessdot \mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}$
$\mu^{(1)} = (5, 4, 1, 1)$
$\mu^{(2)} = (4, 4, 2, 1)$
$\mu^{(3)} = (4, 4, 1, 1, 1)$

すると, 求める場合の数は λ と北西角の組の場合の数で, それは水平方向 $m - 1$ 回, 垂直方向 $n - 1$ 回, 角 1 回の移動の数と等しいから, 多項係数を使って

$$
c(m, n) = \binom{(m-1) + (n-1) + 1}{m-1, n-1, 1} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!}.
$$

レポート問題 8 (問題文 8). 求める群は位数 6 の二面体群 D_6. これは位数 2 の巡回群 C_2 と位数 3 の巡回群 C_3 の半直積として $D_6 \simeq C_2 \ltimes_\varphi C_3$ と書ける群である. 群準同型 $\varphi : C_2 \to \mathrm{Aut}(C_3)$ は, $C_2 = \{e, s\}$, $C_3 = \{e, r, r^2\}$ と書くと, $\varphi_e = \mathrm{id}_{C_3}$, $\varphi_s(r) = r^2$, $\varphi_s(r^2) = r$ で定まるもの.

G が条件を満たすことは明らか. 最小位数であることは次のようにわかる: 位数が $2, 3, 5$ の群は

素数位数なので巡回群である．位数が 4 の群のうち巡回群 C_4 でないものは $C_2 \ltimes_\varphi C_2$ と書けるが, $\varphi_e = \varphi_s = \mathrm{id}_{C_2}$ となるしかないので, 直積 $C_2 \times C_2$ になる．よって求める群の位数は少なくとも 6 である．

なお, 位数 6 の群のうち条件を満たすものが D_6 しかないことは次のようにわかる: Sylow の定理より位数 2 の元 s と位数 3 の元 r があるが, srs^{-1} も位数 3 だから $srs^{-1} = r$ または r^2. 前者は $C_2 \times C_3 \simeq C_6$ であり, 条件を満たさない．後者が二面体群にあたる．

レポート問題 9 (問題文 9)**.** 集合 X の 2 色による色付け $f\colon X \to \{r_0, r_1\}$ を考える．Polya の定理から

$$\sum_{i_0,i_1} \kappa(i_0,i_1) r_0^{i_0} r_1^{i_1} = Z_G(r_0 + r_1, r_0^2 + r_1^2, \dots, r_0^j + r_1^j, \dots). \tag{14.0.2}$$

2 色付け $f\colon X \to \{r_0, r_1\}$ は部分集合 $S_f := \{x \in X \mid f(x) = r_1$ と同一視できる．ここで $S_f \in B_X$ と見なせることを思い出しておく．X に群 G が作用している場合, 2 色付け f と g が G 同値であることは S_f と S_g が B_X の同じ G 軌道に属することと同値である．従って, $(B_X/G)_i$ は X の 2 色付け f であって $|S_f| = i$ となるもの達の G 同値類の数である．つまり

$$(B_X/G)_i = \kappa(|X| - i, i).$$

そこで (14.0.2) で $r_0 = 1$, $r_1 = q$ と代入すれば

$$\sum_i (B_X/G)_i q^i = Z_G(1 + q, 1 + q^2, \dots, 1 + q^j, \dots).$$

レポート問題 10 (問題文 10)**.** 問題 8.5 の解答 (8.5) のように, U は Young 図形に箱を一つ付け加える操作に, D は Young 図形から箱を一つ取り除く操作に対応する．分割 $\lambda = (l_1^{m_1}, \dots, l_r^{m_r})$ の Young 図形に対しては, U では $r+1$ 箇所, D では r 箇所の操作の候補がある．$j = 1, \dots, r$ に対して $\lambda^{+,j}$ を長方形 $m_j \times l_j$ の右上に一つ箱を加えたものとする．更に $\lambda^{+,r+1} := (\lambda, 1)$, つまり λ の最下行の下に一つ箱を加えたものとすると $U\lambda = \sum_{j=1}^{r+1} \lambda^{+,j}$ となる．同様に $\lambda^{-,j}$ を長方形 $m_j \times l_j$ の右下の箱を取り除いたものとすると $D\lambda = \sum_{j=1}^{r} \lambda^{-,j}$ となる．この記号のもと, 分割 λ に対して $UD(\lambda)$ 及び $DU(\lambda)$ に現れる分割 μ について, $\mu \neq \lambda$ ならば $j, k = 1, 2, \dots$ が存在して $\mu = (\lambda^{+,j})^{-,k} = (\lambda^{-,k})^{+,j}$ となる．よって $(DU - UD)(\lambda)$ における μ の係数は 0. 一方 $\mu = \lambda$ については, $UD(\lambda)$ では $\lambda = (\lambda^{+,j})^{-,j}$, $j = 1, \dots, r+1$ の $r+1$ 個, $DU(\lambda)$ では $\lambda = (\lambda^{-,j})^{+,j}$, $j = 1, \dots, r$ の r 個があるから, $(DU - UD)(\lambda)$ における λ の係数は $(r+1) - r = 1$. 以上より $(DU - UD)(\lambda) = \lambda$.

レポート問題 11 (問題文 11)**.** シェリングの定義 12.10 における記号を用いる．つまり, $F_1, \dots, F_t$ を $(d-1)$ 次元単体的複体 Δ のシェリングとし, G_j を F_j の制限, $\Delta_j := \langle F_1, \dots, F_j \rangle$ とする．$m := \#G_j$ とすると, F_j の m 元部分集合 S が存在して, S は Δ_{j-1} に属さない F_j の極小な面として一意に特徴づけられる．$d = \#F_j$ なので, S を含む F_j の $(m+i)$ 元部分集合 T の数は $\binom{d-m}{i}$ である．従って多項式 $f(x) := \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i}$ における F_j の寄与は

$$\sum_{i \geq 0} \binom{d-m}{i} (x-1)^{d-(m+i)} = \sum_{k=0}^{d-m} \binom{d-m}{k} (x-1)^{d-k} = x^{d-m} = x^{d-\#G_j}.$$

これを $j=1,\dots,t$ について足し上げたものが $f(x)$ だから, $f(x)=\sum_{j=1}^{t} x^{d-\#G_j}$. 求める多項式は $h(x):=\sum_{j=1}^{t} h_i x^i = y^{-d}f(y)\big|_{y=x^{-1}}$ だから $h(x)=\sum_{j=1}^{t} x^{\#G_j}$.

レポート問題 12 (問題文 12)**.** $K[V]=K[x_1,\dots,x_n]$ の d 次成分 $K[V]_d$ の基底として $\{x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n} \mid d_1+\cdots+d_n=d\}$ が取れるから, $N_d:=\{(d_1,\dots,d_n)\in\mathbb{N}^n \mid d_1+\cdots+d_n=d\}$ として $\dim K[V]_d=|N_d|$. すると

$$\begin{aligned} L(K[V],t) &= \sum_{d\in\mathbb{N}} t^d\,|N_d| = \sum_{d\in\mathbb{N}} \sum_{(d_1,\dots,d_n)\in N_d} t^{d_1+\cdots+d_n} \\ &= \sum_{d_1\in\mathbb{N}} t^{d_1}\cdots \sum_{d_n\in\mathbb{N}} t^{d_n} = \frac{1}{1-t}\cdots\frac{1}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^n}. \end{aligned}$$

あるいは次数付き K 代数のテンソル積として $K[V]\simeq K[X_1]\otimes_K K[x_2]\otimes_K\cdots\otimes_K K[x_n]\simeq K[x]^{\otimes n}$ だから $L(K[V],t)=\prod_{i=1}^{n} L(K[x_i],t)=L(K[x],t)^n=\frac{1}{(1-t)^n}$.

参考文献

[FRT54] J. S. Frame, G. de B. Robinson, R. M. Thrall, *The hook graphs of* S_n, Can. J. Math. **6** (1954) 316–324.

[Lu66] D. Lubell, *A short proof of Sperner's lemma*, J. Comb. Theor. **1** (1966), 299.

[P37] G. Pólya, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, Acta Math. **68**, 145–254 (1937).

[Sp28] E. Sperner, *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge*, Math. Z. **27** (1928), no. 1, 544–548.

[S] R. P. Stanley, *Algebraic Combinatorics*, 2nd ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2018.

[岡 06] 岡田聡一, **古典群の表現論と組み合わせ論 下**, 数理物理シリーズ **4**, 培風館, 2006.

以上です.