2021/07/30

数学演習IX・X　柳田クラス
第12回　Chapter 12　A Glimpse of Combinatorial Commutative Algebra (組み合わせ論的可換環論)

柳田 伸太郎

このスライドはNUCTの「リソース」においてあります.

Zoomに自分の苗字と名前の両方が表示されるようにして下さい.

12.5　次数付き環, Hilbert 級数, 正則列, depth

K を体とする.

定義. K 代数 A に K 線形空間としての直和分解 $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} A_d$ が定められていて, 任意の $a_d \in A_d$ と $a_e \in A_e$ に対して $a_d a_e \in A_{d+e}$ となる時, A を次数付き K 代数と呼ぶ. その元 f は, $i \in \mathbb{N}$ が存在して $f \in A_d$ となる時, 次数 d の斉次元と呼ばれる.

例. 多項式環 $K[V] = K[x_1, \ldots, x_n]$ は, 各 x_i を次数 1 の斉次元とすることで

$$K[V] = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} K[V]_d, \quad K[V]_d = \{(\text{通常の意味での})\text{全次数が } d \text{ である多項式}\}$$

と直和分解し, 次数付き可換 K 代数の構造を持つ.

定義. 次数付き K 代数 $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} A_d$ の各斉次部分 A_d が有限次元の場合, A の Hilbert 級数を次で定義する.

$$L(A, t) := \sum_{d\in\mathbb{N}} t^d \dim_K A_d.$$

例. 一変数多項式環 $K[x] = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} Kx^d$ の Hilbert 級数は

$$L(K[x], t) = \sum_{d\in\mathbb{N}} t^d =: \frac{1}{1-t}.$$

この副節の目標は剰余環のHilbert級数に関する定理 12.20である．準備を幾つか行う．

補題． 次数付き可換K代数$A=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}A_d$の斉次元$\theta$について，$\theta$が生成するイデアル$(\theta)\subset A$による剰余環$A/(\theta)$は

$$A/(\theta)=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}\big(A/(\theta)\big)_d,\quad \big(A/(\theta)\big)_d:=\{f+(\theta)\mid f\in A_d\}$$

により次数付き可換K代数の構造を持つ．

証明． 簡単なので略． □

定義． 可換環Rの元uは，$uy=0$となる$y\in R$が$y=0$に限られる時，**正則**である，または**非零因子**と呼ばれる．

実級数$a(t)=\sum_{i\geq 0}a_it^i$と$b(t)=\sum_{i\geq 0}b_it^i$に対し半順序$a(t)\leq b(t)$を次で定める:

$$a(t)\leq b(t):\iff \text{全ての}\, i\in\mathbb{N}\,\text{に対して}\, a_i\leq b_i.$$

補題 12.19． 各斉次部分が有限次元である$A=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}A_d$と$\theta\in A_1$に対して

$$L(A,t)\leq\frac{L(A/(\theta),t)}{1-t}.$$

更に，等号が成立することとθが非零因子であることは同値．

可換環Rの二元a,bに対して，剰余環$R/(a)$の元$b+(a)$のことを単にbと書く．

定義． 可換環Rの元の列$(\theta_1,\dots,\theta_j)$は，任意の$1\leq i\leq j-1$について$\theta_i$が剰余環$R/(\theta_1,\dots,\theta_{i-1})$の正則元である場合，正則列と呼ばれる．

補題 12.19を繰り返し用いると

定理 12.20. $A=\bigoplus_{d\in\mathbb{N}}A_d$を斉次部分が有限次元である次数付き可換環とし，また$\theta_1,\dots,\theta_j\in A_1$とする．この時

$$L(A,t)\leq\frac{L(A/(\theta_1,\dots,\theta_j),t)}{(1-t)^j}$$

であり，等号は$(\theta_1,\dots,\theta_j)$が正則列である時に限り成立する．

12.6 Stanley-Reisner環

引き続きKを体とする．$V=\{x_1,\dots,x_n\}$とし，部分集合$S\subseteq V$に対し

$$x_S:=\prod_{x_i\in S}x_i\in K[V]=K[x_1,\dots,x_n]$$

と書く．例えば$S=\{x_1,x_2,x_4\}$なら$x_S=x_1x_2x_4$．

定義. Δ を頂点集合 V の単体的複体とし, I_Δ を $\{x_S \mid S \subset V,\ S \notin \Delta\}$ が生成する $K[V]$ のイデアルとする. 次の剰余環を Δ の face ring または Stanley-Reisner 環という.

$$K[\Delta] := K[V]/I_\Delta.$$

定義. 単項式 $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ に対し $\operatorname{supp}(u) := \{x_i \mid a_i > 0\}$ とし, u の台と呼ぶ.

補題. イデアル I_Δ について, 次の部分集合は I_Δ の K 線形空間としての基底である.

$$\{u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in I_\Delta \mid \operatorname{supp}(u) \notin \Delta\}.$$

発表用問題 12.11. この補題を示せ.

以下, $f \in K[V]$ に対して $f + I_\Delta \in K[\Delta]$ を $\overline{f}$ と書く.

系. $K[\Delta]$ の K 基底として, 台が Δ の面である単項式からなる集合が取れる:

$$\{\overline{u} \mid u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in K[V],\ \operatorname{supp}(u) \in \Delta\}. \tag{12.6.1}$$

基底 (12.6.1) の各元 $\overline{u}$ に対して $\deg \overline{u} := \deg u = a_1 + \cdots + a_n$ とすれば, 直和分解

$$K[\Delta] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} K[\Delta]_i, \quad K[\Delta]_i := \bigoplus_{\deg \overline{u} = i} K\overline{u} \tag{12.6.2}$$

が得られ, $K[\Delta]$ は次数付き可換 K 代数になり, Hilbert 級数 $L(K[\Delta], t)$ が定まる.

定理 12.18. Δ が $(d-1)$ 次元単体的複体で $h(\Delta)=(h_0,h_1,\dots,h_d)$ の時,

$$L(K[\Delta],t)=\frac{h_0+h_1t+\cdots+h_dt^d}{(1-t)^d}.$$

証明. Δ の面 F に対して $M_F:=\{u=x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}\mid \operatorname{supp}(u)=F\}$ とすると

$$\sum_{u\in M_F}t^{\deg(u)}=\Big(\prod_{x_i\in F}\sum_{a_i\geq 1}t^{a_i}\Big)=\frac{t^{\#F}}{(1-t)^{\#F}}$$

これを F について足し上げる. $\dim\Delta=d-1$ と f ベクトル $f(\Delta)=(f_0,\dots,f_d)$ より

$$L(K[\Delta],t)=\sum_{F\in\Delta}\frac{t^{\#F}}{(1-t)^{\#F}}=\sum_{i=0}^{d}f_{i-1}\frac{t^i}{(1-t)^i}=\frac{\sum_{i=0}^{d}f_{i-1}t^i(1-t)^{d-i}}{(1-t)^d}.$$

但し $f_{-1}=1$. 更に h ベクトルの定義を下の $(*)$ で用いると

$$\sum_{i=0}^{d}f_{i-1}t^i(1-t)^{d-i}=t^d\sum_{i=0}^{d}f_{i-1}\big(t^{-1}-1\big)^{d-i}\overset{(*)}{=}t^d\sum_{i=0}^{d}h_it^{-(d-i)}=\sum_{i=0}^{d}h_it^i.$$

$\square$

12.7　Cohen-Macaulay性

今まで通り, Δ を単体的複体, K を体とする.

定義. 可換環 R の正則列の長さの最大値を R の depth (深さ) と言い, $\operatorname{depth} R$ と書く.

定義 12.21. K を無限体とする. $(d-1)$ 次元単体的複体 Δ が $\operatorname{depth} K[\Delta] = d$ を満たす時, Δ は Cohen-Macaulay と呼ばれる.

以下 K は無限体とする. Δ を $(d-1)$ 次元 Cohen-Macaulay 単体的複体とし, $\theta_1, \ldots, \theta_d \in K[\Delta]_1$ を最長の正則列とする. 剰余環

$$R := K[\Delta]/(\theta_1, \ldots, \theta_d)$$

には $K[\Delta]$ の次数付け (12.6.2) が遺伝して直和分解

$$R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i, \quad R_i := \{f + (\theta_1, \ldots, \theta_d) \mid f \in K[\Delta]_i\} \tag{12.7.1}$$

が定まり, これで R は次数付き可換 K 代数になる. 定理 12.18 と定理 12.20 から, Δ の h ベクトル $h(\Delta) = (h_0, \ldots, h_d)$ を用いると剰余環 R の Hilbert 級数 $L(R, t)$ は

$$L(R, t) = h_0 + h_1 t + \cdots + h_d t^d. \tag{12.7.2}$$

12.8 eベクトルとCohen-Macaulay単体的複体

(12.7.2)によりCohen-Macaulay単体的複体のhベクトルに代数的な意味がついた．次にhベクトルの組み合わせ論的な意味を一つ与える．

定義． 有限集合$\{1, 2, \ldots, n\}$を頂点集合とするmulticomplexとは，マルチセットの集合Γであって次の二条件を満たすもののことである．

(i) 各$i = 1, \ldots, n$に対して$\{i\} \in \Gamma$.

(ii) $F \in \Gamma$かつ$G \subseteq F$ならば$G \in \Gamma$.

定義． multicomplex Γに対し$e_j := \#\{F \in \Gamma \mid \#F = j\}$とし，$e(\Gamma) := (e_0, e_1, \ldots)$を$\Gamma$の$e$ベクトルと呼ぶ．また整数列$e = (e_0, e_1, \ldots)$であって，multicomplex Γが存在して$e = e(\Gamma)$となるものをeベクトルと呼ぶ．

この副節の目標は:

系 12.23. ΔがCohen-Macaulay単体的複体ならば，そのhベクトル$h(\Delta)$はeベクトル．

まず多項式環に関する以下の定理 12.22を示す．

定義． 変数$V = \{x_1, \ldots, x_n\}$の単項順序イデアルとは，変数Vの単項式からなる集合$\mathfrak{o}$であって，$v \in \mathfrak{o}$が単項式$u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$で割り切れるなら$u \in \mathfrak{o}$となるもののこと．

multicomplexの定義から次の言いかえが従う．

補題. 変数 $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ の単項式からなる集合 S が単項順序イデアル $\iff$

$$\{M_u := \{1^{a_1}, \ldots, n^{a_n}\} \mid u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in S\} \tag{12.8.1}$$

は multicomplex.

定義. 多項式環 $K[V] = K[x_1, \ldots, x_n]$ の斉次イデアルとは斉次多項式達で生成されるイデアルのことである.

定理 12.22. 多項式環 $K[V]$ の斉次イデアル I について, 剰余環 $P := K[V]/I$ の K 基底であってかつ単項順序イデアルとなるものがある.

証明はテキスト [S, p.208, 12.24 Theorem] を参照のこと.

系 *12.23*の証明. $(\theta_1, \ldots, \theta_d)$, $\theta_i \in K[\Delta]_1$ を $K[\Delta]$ の最長正則列とする.

$$R := K[\Delta]/(\theta_1, \ldots, \theta_d) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$$

を剰余環及びその次数付け (12.7.1) とする. (12.7.2) より $h_i(\Delta) = \dim_K R_i$ なので, R_i の任意の K 基底 D_i は $\#D_i = h_i$ を満たす. 定理 12.22 より R_i の K 基底 B_i であって $\gamma = \bigcup_{j=0}^{d} B_i$ が単項順序イデアルになるものが存在する. (12.8.1) より Γ から multicomplex が定まるが, その e ベクトルを $(e_0, e_1, \ldots)$ と書くと $e_i = \#B_i = h_i$ となる. 従って主張が成立する. □

12.9　シェラブル性と Cohen-Macaulay 性

前回扱ったシェラブルな単体的複体と Cohen-Macaulay 性が関係することを説明しよう．引き続き K は無限体とする．

定理 12.24. 頂点集合が $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ である単体的複体 Δ について，シェラブルならば Cohen-Macaulay．更に，Δ がシェラブルで $F_1, \ldots, F_t$ を Δ のシェリング，$G_1, \ldots, G_t$ を制限とすると，$B := \{x_{G_1}, \ldots, x_{G_t}\}$ は $R = K[\Delta]/(\theta_1, \ldots, \theta_d)$ の K 基底．ここで $(\theta_1, \ldots, \theta_d)$，$\theta_i \in K[\Delta]_1$ は $K[\Delta]$ の任意の最長正則列．

12.10　Cohen-Macaulay 性の特徴づけ

定理 12.25. 整数列 $h = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ に関する次の三条件は同値．

(a)　$(d-1)$ 次元 Cohen-Macaulay 単体的複体 Δ が存在して $h = h(\Delta)$．

(b)　$(d-1)$ 次元のシェラブルな単体的複体 Δ が存在して $h = h(\Delta)$．

(c)　h は e ベクトル．

証明． (b) $\Rightarrow$ (a) は定理 12.24，(a) $\Rightarrow$ (c) は系 12.23 である，(c) $\Rightarrow$ (b) を示そう．
与えられた e ベクトル h に対して，シェラブルな単体複体 Δ であって $h(\Delta) = h$ となるものを作る．$i = 0, 1, \ldots, d$ と $h_i \in \mathbb{N}$ に対して，長さ i の正整数のマルチセットを逆辞書式

順序でh_i番目まで並べたものを$\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_{h_i}^{(i)}$と書く．例えば$i = 3$, $h_3 = 8$なら

$$(\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \dots, \alpha_8^{(3)}) = (111, 112, 122, 222, 113, 123, 223, 133). \quad (12.10.1)$$

$\alpha_j^{(i)} = a_1 a_2 \cdots a_i$だとして，それに対してマルチセット$\beta_j^{(i)}$を次で定める．

$$\beta_j^{(i)} := \{1, 2, \dots, d-i, a_1 + d - i + 1, a_2 + d - i + 2, \dots, a_i + d\}. \quad (12.10.2)$$

これらを並べて$\beta^{(i)} := \beta_1^{(i)}, \dots, \beta_{h_i}^{(i)}$と書く．例えば(12.10.1)と$d = 5$に対しては

$$\beta^{(3)} = (\beta_1^{(3)}, \dots, \beta_8^{(3)}) = (12456, 12457, 12467, 12567, 12458, 12468, 12568, 12478).$$

与えられた$h = (h_0, \dots, h_d)$に対して上の要領で$\beta^{(0)}, \dots, \beta^{(d)}$を作り，それらを並べた列を$\sigma = (\beta^{(0)}; \dots; \beta^{(d)})$と書く．例えば$d = 3$, $h = (1, 4, 2, 1)$なら，

$$\sigma = (123; 124, 125, 126, 127; 134, 135; 234). \quad (12.10.3)$$

するとσは長さ$m := \sum_{i=0}^{d} h_i = f_{d-1}(\Delta)$の列で，頂点集合が$\{1, 2, \dots, h_i + d\}$の$(d-1)$次元単体複体$\Delta$のシェリングを与える．(例えば(12.10.3)なら長さは$m = 1 + 4 + 2 + 1 = 8$.) $\sigma = (F_1, \dots, F_m)$と書き直すと，$F_k$が(12.10.2)で与えられる場合，制限は$G_k = \{a_1 + d - i + 1, a_2 + d - i + 2, \dots, a_i + d\}$になる．よって$i$元からなる制限$G_k$は$h_i$個あるので，$h(\Delta) = h$となる． $\square$

レポート問題11 & 次回について

全般的な注意

- 講義ノートのp.79にレポート問題12があります.
  締切は8/06の13時です. NUCTで提出して下さい.
- スマートフォン等でスキャンしたレポートは, PDFに変換して頂けると助かります.
  変換方法はNUCT「リソース」の「スキャンファイルのPDF変換.pdf」参照.

次回について.

- 次回は8/06 (金)で最終回です.
  一コマ目 (09:30–10:30) はありません.
  二コマ目 (10:45–11:45) は今回説明した§12 の発表用問題12.5–12.12について,
  希望者に解答を発表してもらいます.

一コマ目はここまでです.