2021/07/16

数学演習IX・X　柳田クラス
第11回　Chapter 12　A Glimpse of Combinatorial Commutative Algebra (組み合わせ論的可換環論)

柳田 伸太郎

このスライドはNUCTの「リソース」においてあります.

Zoomに自分の苗字と名前の両方が表示されるようにして下さい.

12.1　単体的複体

定義. 有限集合 $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ を頂点集合とする単体的複体 (simplicial complex) とは, V の部分集合からなる集合 Δ であって次の二条件を満たすもののことである.

(i) 各 $i = 1, \dots, n$ に対して $\{x_i\} \in \Delta$.

(ii) $F \in \Delta$ かつ $G \subseteq F$ ならば $G \in \Delta$.

Δ の各元 F を面 (face) と呼ぶ. また包含関係に関する Δ の極大元, つまり他の面に含まれない面, のことをファセット (facet) と呼ぶ. そして面 F の次元を $\dim F := (\#F) - 1$ で定義し,

$$\dim \Delta := \max\{\dim F \mid F \in \Delta\}$$

を単体的複体 Δ の次元と呼ぶ.

定義. 有限集合からなる有限集合 Γ に対し, Γ の各元を含む最小の単体的複体は

$$\langle \Gamma \rangle := \{F \mid \text{ある } G \in \Gamma \text{ が存在して } F \subseteq G\}.$$

例. 有限集合を $123 = \{1, 2, 3\}$ 等と略記する. $\Gamma = \{123, 14, 24\}$ の場合,

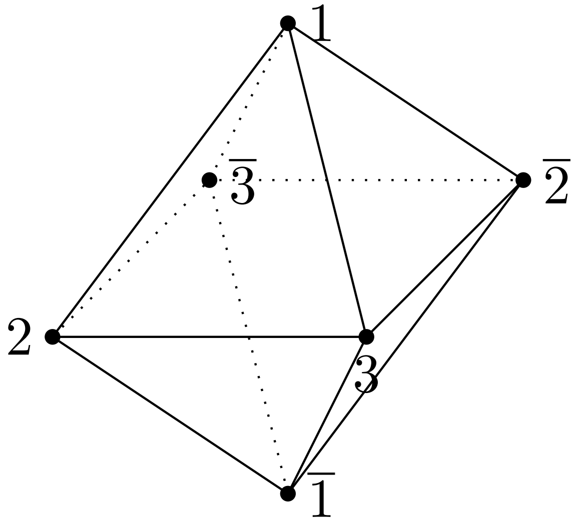
$$\langle 123, 14, 24 \rangle = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 123\}.$$

テキスト [S, pp.188–190] には単体的複体 Δ の幾何学的実現 (geometric realization) $|\Delta| \subset \mathbb{R}^d$ (d は十分大きい正整数) が紹介されている. ここでは例で説明する.

例 12.4. 頂点集合 $V = \{1, \overline{1}, 2, \overline{2}, 3, \overline{3}\}$ の単体的複体 Δ を考える:

$$\Delta := \left\langle 123, \overline{1}23, 1\overline{2}3, 12\overline{3}, \overline{12}3, \overline{1}2\overline{3}, 1\overline{23}, \overline{123} \right\rangle .$$

これは図のような八面体の面, 辺, 点からなる集合と見なせる.



$$\begin{aligned}\Delta = \{&123, \overline{1}23, 1\overline{2}3, 12\overline{3}, \overline{12}3, \overline{1}2\overline{3}, 1\overline{23}, \overline{123},\\ &12, 13, 1\overline{2}, 1\overline{3}, \overline{1}2, \overline{1}3, \overline{12}, \overline{13}, 23, 2\overline{3}, \overline{2}3, \overline{23},\\ &1, 2, 3, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3},\\ &\emptyset\}\end{aligned}$$

12.2 f ベクトルと Kruskal-Katona の定理

定義. Δ を頂点集合 V の単体的複体とし, $d-1 := \dim \Delta$ とする. 各 $i = -1, 0, \ldots, d-1$ に対して f_i で i 次元の面の数を表す. 特に $f_{-1} = 1$ であり, $f_0 = \#V$ である. そして次の数ベクトルを Δ の f ベクトルと呼ぶ.

$$f(\Delta) := (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1}) \in \mathbb{N}^d.$$

与えられたベクトルに対して，それがいつ単体的複体の f ベクトルになるかを考えよう．

命題 12.5. 任意の正整数 n, j に対し，整数列

$$n_j > n_{j-1} > \cdots > n_1 \geq 0$$

であって次を満たすものが唯一存在する．

$$n = \binom{n_j}{j} + \binom{n_{j-1}}{j-1} + \cdots + \binom{n_1}{1}. \tag{12.2.1}$$

証明．帰納法で示せる．詳細は略． □

定義． 命題 12.5 の分解 (12.2.1) を n の j 二項展開と呼ぶ．そして $n^{(j)} \in \mathbb{N}$ を次で定める．

$$n^{(j)} := \binom{n_j}{j+1} + \binom{n_{j-1}}{j} + \cdots + \binom{n_1}{2}.$$

定理 12.6 (Kruskal-Katona の定理)**.** 正整数の数列 $(f_0, f_1, \ldots, f_{d-1}) \in \mathbb{P}^d$ が $d-1$ 次元単体的複体の f ベクトルであるための必要十分条件は

$$f_{i+1} \leq f_i^{(i+1)} \quad (i = 0, 1, \ldots, d-2). \tag{12.2.2}$$

例． 例 12.4 の八面体に対応した単体的複体 Δ について，$\dim\Delta = 2 = 3-1$ 及び $f(\Delta) = (f_0, f_1, f_2) = (6, 12, 8)$ である．f_i の $i+1$ 二項展開と $f_i^{(i+1)}$ を計算すると

$$f_0 = 6 = \binom{6}{1}, \qquad f_0^{(1)} = \binom{6}{2} = 15 \geq f_1 = 12,$$

$$f_1 = 12 = \binom{5}{2} + \binom{2}{1}, \qquad f_1^{(2)} = \binom{5}{3} + \binom{2}{2} = 11 \geq f_2 = 8.$$

テキスト [S] に従って，Kruskal-Katona の定理 12.6 の証明のうち十分条件の方のみ説明する．定理の条件 (12.2.2) を満たすベクトル f に対して，$f(\Delta) = f$ となる単体的複体 Δ を具体的に構成すれば良い．

定義． 長さ j の非負整数列の集合 $\mathbb{N}^j$ を考える．$\mathbb{N}^j$ 上の逆辞書式順序 $\overset{R}{\leq}$ を次で定める: $a = (a_1, \ldots, a_j)$ と $b = (b_1, \ldots, b_j)$ に対し

$$a \overset{R}{\leq} b :\Longleftrightarrow \text{ある } 0 \leq i \leq j-1 \text{ が存在して}$$
$$a_j = b_j,\ a_{j-1} = b_{j-1},\ \ldots,\ a_{j-i+1} = b_{j-i+1},\quad a_{j-i} \leq b_{j-i}.$$

定義． $f = (f_0, \ldots, f_{d-1}) \in \mathbb{P}^d$ に対し，Γ_f を $\mathbb{N}$ の部分集合からなる有限集合であって，$\emptyset$ 及び $\mathbb{N}$ の $(i+1)$ 元部分集合のうち逆辞書式順序で小さい順に f_i 個からなるものとする．

例. 有限集合を$01 := \{0,1\}$の様に略記すると, $f=(6,8,5,2)$に対するΓ_fは

$$\Gamma_{(6,8,5,2)} := \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \\ 0,1,2,3,4,5, \\ 01,02,12,03,13,23,04,14, \\ 012,013,023,123,014, \\ 0123,0124 \end{array} \right\}$$

この$\Gamma_{(6,8,5,2)}$は単体的集合ではない(例えば$0124 \in \Gamma_f$だが$124 \notin \Gamma_f$).

定理 12.8. $f=(f_0,\ldots,f_{d-1}) \in \mathbb{P}^d$について, Γ_fが単体的複体であるための必要十分条件は(12.2.2), つまり

$$f_{i+1} \le f_i^{(i+1)} \quad (i=0,1,\ldots,d-2).$$

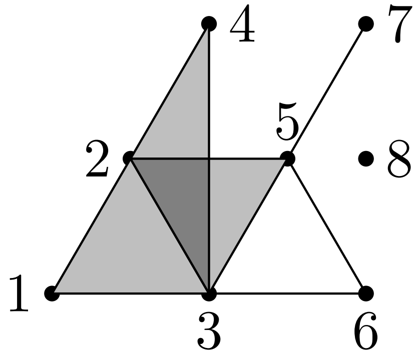
特にKruskal-Katonaの定理のうち, (12.2.2)が十分条件であることが従う.

証明. 略. □

12.3　シェラブルな単体的複体

定義. 単体的複体は，そのファセット達の次元が全て等しい時，**純** (pure) であると言う.

例. 例 12.4 の八面体に対応した単体的複体 Δ は純である．一方，下図の単体的複体 Δ' は純ではない.



$$\Delta' = \{123, 234, 235, \\ 12, 13, 23, 24, 25, 35, 36, 56, 57, \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \emptyset\}$$

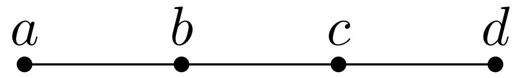
定義 12.10. $d-1$ 次元単体的複体 Δ が**シェラブル** (shellable) であるとは，Δ が純であり，かつそのファセットの集合に全順序 $F_1, F_2, \ldots, F_t$ $(t := f_{d-1})$ があって，以下の条件を満たすことを言う.

- $\Delta_0 := \emptyset$ 及び各 $j = 1, \ldots, t$ に対し $\Delta_j := \langle F_1, \ldots, F_j \rangle$ とする．$j \geq 1$ なら，F_j の部分集合であって Δ_{j-1} に含まれないもののうち，包含関係について極小なもの G_j が唯一存在する.

この時，全順序 $F_1, F_2, \ldots, F_t$ $(t := f_{d-1})$ を Δ の**シェリング順序** (shelling order) または Δ の**シェリング** (shelling) と呼び，G_j を F_j の**制限** (restriction) と呼ぶ.

例 12.11. シェラブルな単体的複体の例を挙げる.

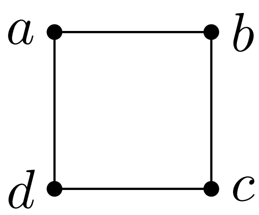
(a) 下図の一次元単体的複体Δについて，全順序ab, bc, cdはシェリング順序.
実際，$t = f_1 = 3$で，$j = 1$の場合は$\Delta_0 = \emptyset$, $\langle ab \rangle = \{ab, a, b, \emptyset\}$なので$G_1 = \emptyset$.
$j = 2$の場合，$\Delta_1 = \langle ab \rangle = \{ab, a, b, \emptyset\}$, $\langle bc \rangle = \{bc, b, c, \emptyset\}$なので$\langle bc \rangle \setminus \Delta_1 = \{bc, c\}$となり$G_2 = \{c\}$. そして$j = 3$の場合は$\Delta_2 = \langle ab, bc \rangle = \{ab, bc, a, b, c, \emptyset\}$,
$\langle cd \rangle = \{cd, c, d, \emptyset\}$より$\langle cd \rangle \setminus \Delta_2 = \{cd, d\}$となって$G_3 = \{d\}$.



$$\Delta = \{ab, bc, cd, a, b, c, d, \emptyset\}$$

しかしab, cd, bcはシェリング順序ではない. 実際，$j = 2$の時に,
$\Delta_1 = \langle ab \rangle = \{ab, a, b, \emptyset\}$と$\Delta_2 = \langle ab, cd \rangle = \{ab, cd, a, b, c, d, \emptyset\}$より
$\Delta_2 \setminus \Delta_1 = \{cd, c, d\}$なので，$c$と$d$の二つが極小元.

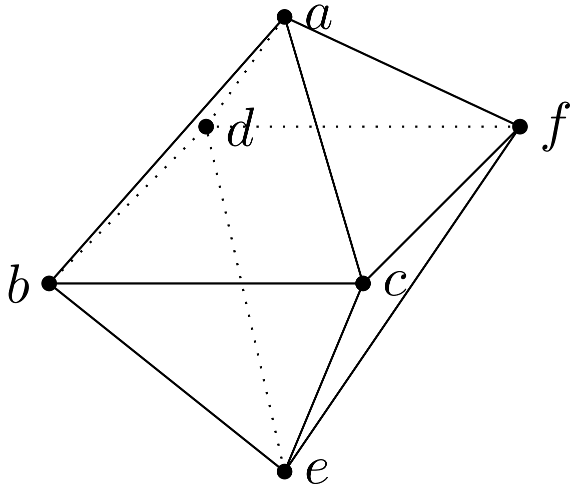
(b) 以下の図の単体的複体Δについて，全順序ab, bc, cd, daはシェリング順序(問題 12.3).



$$\Delta = \{ab, bc, cd, da, a, b, c, d, \emptyset\}$$

発表用問題 12.3. 例 12.11 (b)の単体的複体Δについて，全順序ab, bc, cd, daがシェリング順序であることを示せ.

例 12.12. 例 12.4の八面体に対応した単体的複体Δについて，下図のように頂点のラベルを付け直すと，全順序$abc, abd, bce, acf, bde, cef, adf, def$はシェリング順序である.



$$\Delta = \{abc, abd, acf, adf, ebc, ebd, ecf, edf,\\ ab, ac, ad, af, bc, bd, be, ce, cf, de, df, ef,\\ a, b, c, d, e, f, \emptyset\}$$

発表用問題 12.4. 例 12.12 のΔの全順序に関して，$t = f_2 = 8$に注意して

$$G_1 = \emptyset,\ G_2 = d,\ G_3 = e,\ G_4 = f,\ G_5 = de,\ G_6 = ef,\ G_7 = ed,\ G_8 = def$$

となり，特にΔがシェラブルであることを示せ.

シェラブルな単体的複体のfベクトルを調べる上で次の定義が役立つ.

定義． $\Delta \neq \emptyset$ を $(d-1)$ 次元単体的複体とする．その f ベクトル $f(\Delta) = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$ 及び $f_{-1} = 1$ から

$$\sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i} \tag{12.3.1}$$

によって $h_0, h_1, \ldots, h_d$ を定め，

$$h(\Delta) := (h_0, h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$$

とする．これを Δ の h ベクトルと呼ぶ．

例 12.14． 例 12.11, 12.12 のシェラブルな単体的複体について h ベクトルを計算しよう．

(1) 例 12.11 (a) の Δ については，$f(\Delta) = (4, 3)$ より

$$(x-1)^2 + 4(x-1) + 3 = x^2 + 2x$$

となるので $h(\Delta) = (1, 2, 0)$．

(2) 例 12.11 (b) の Δ については，$f(\Delta) = (4, 4)$ より

$$(x-1)^2 + 4(x-1) + 4 = x^2 + 2x + 1$$

となるので $h(\Delta) = (1, 2, 1)$．

(3) 例 12.12の八面体Δについては，$f(\Delta) = (6, 12, 8)$より

$$(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 12(x-1) + 8 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

となるので$h(\Delta) = (1, 3, 3, 1)$.

定理 12.15. $F_1, \ldots, F_t$を$(d-1)$次元単体的複体Δのシェリング順序とし，$G_1, \ldots, G_t$を付随する制限とする．この時

$$\sum_{i=0}^{d} h_i x^i = \sum_{j=1}^{t} x^{\#G_j}.$$

証明はレポート問題 11．この主張からシェラブルである為の必要条件が得られる．

系 12.16. $\Delta \neq \emptyset$を純$(d-1)$次元単体的複体とする．Δがシェラブルならば

$$h_i(\Delta) \geq 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, d)$$

注意. hベクトルの定義の(12.3.1)で$x = 0$とすれば，

$$h_d = (-1)^{d-1}(\chi(\Delta) - 1), \quad \chi(\Delta) := f_0 - f_1 + f_2 - \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1}$$

となる．$\chi(\Delta)$はEuler指標と呼ばれる量で，実は幾何学的実現$|\Delta|$の位相不変量である．

12.4　環, イデアル, 剰余環

次回行うhベクトルに関する議論では簡単な可換環論が必要になる．その準備をこの副節で行う．詳細は3年生後期の代数学要論 (環論) で扱われる．

Kを体とする (例えば複素数全体$\mathbb{C}$)．$V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$を変数の集合とする$K$係数の多項式全体のなす集合を次のように書く．

$$K[V] = K[x_1, \ldots, x_n].$$

この集合は, 多項式の和に関して群であり, 多項式の積に関して結合則が成立し, さらに積は和に関して分配法則を満たす．つまり以下の意味で単位元を持つ可換環である．

定義． 集合Rに二項演算$+$と$\cdot$があって以下の三条件が満たされる時, $(R, +, \cdot)$を**環**と呼ぶ．

(i) Rは$+$に関して可換群である．

(ii) 演算$\cdot$は結合律を満たす: 任意の$a, b, c \in R$に対して$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(iii) 演算$\cdot$は$+$に関して分配法則を満たす．つまり任意の$a, b, c \in R$に対して
$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$.

簡単のため$(R, +, \cdot)$のことをRと書く．演算$+$を環Rの和と呼び, 可換群$(R, +)$の単位元を0と書いて環Rの零元と呼ぶ．また演算$\cdot$をRの積と呼ぶ．

以降, 環の積$\cdot$を略して$ab := a \cdot b$等と書くこともある．

定義. 環 R の元 1 は, 任意の $a \in R$ に対して $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ を満たす時, R の単位元と呼ばれる.

定義. 積が可換な環 R を**可換環**と呼ぶ.

多項式の和 $+$ と積 $\cdot$ でもって $(K[V], +, \cdot)$ は可換環になり, 更に $1 \in K[V]$ はこの環の単位元である. この可換環の構造を強調するために, $K[V]$ のことを (n 変数の K 係数) **多項式環**と呼ぶ.

定義. 体 K 上の線形空間 A が環構造を持ち, 更に

(i) 環としての和と線形空間としての和は一致する.

(ii) 任意の $k \in K$ と $a, b \in A$ について, K 上の線形空間としてのスカラー倍を $k \cdot a \in A$ と書くと $k \cdot (ab) = (k \cdot a)b = a(k \cdot b)$.

の二条件を満たす時, A を **K 上の代数**または **K 代数**と呼ぶ.
また環として可換環である K 代数を **K 上の可換代数**または**可換 K 代数**と呼ぶ.

この意味で多項式環 $K[V]$ は可換 K 代数である.

定義. 環 R の部分集合 I が和に関して部分群であり, I の各元に R の任意の元を左からかけても, また右からかけても I に含まれる時, I を R の**両側イデアル**と呼ぶ.
R が可換環の場合, その両側イデアルのことを単に**イデアル**と呼ぶ.

定義. 可換環 R の元 $a_1, \ldots, a_r \in R$ に対し, 次の集合は R のイデアルである.

$$(a_1, \ldots, a_r) := \{a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r \mid f_i \in R\ (i = 1, \ldots, r)\}.$$

これを $a_1, \ldots, a_r$ **が生成するイデアル**と呼ぶ.

環 R の両側イデアル I が与えられた時, $f, g \in R$ に対して二項関係 $\sim_I$ を次で定義する:

$$f \sim_I g \ :\Longleftrightarrow \ f - g \in I.$$

$\sim_I$ による同値類の集合 $R/\sim_I$ を次のように書く:

$$R/I := R/\sim_I \ .$$

R/I に次のように二項演算を定義すると, $(R/I, +, \cdot)$ は環になる:

和: $\quad (f + I) + (g + I) := (f + g) + I,$

積: $\quad (f + I) \cdot (g + I) := fg + I.$

定義. 上記の環 R/I を環 R の両側イデアル I による**剰余環**と呼ぶ.

定義. 環 R から環 S への(環)準同型とは，写像 $\varphi\colon R \to S$ であって和に関する群準同型であり，かつ積に関して $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ を満たすもののことを言う．
全単射である環準同型を(環)同型と呼ぶ．

補題. 環 R から環 S への準同型 $\varphi\colon R \to S$ について，その核

$$\operatorname{Ker}\varphi := \{r \in R \mid \varphi(r) = 0\}$$

は R の両側イデアルである．

命題 (環の準同型定理). 環 R から環 S への環準同型 $\varphi\colon R \to S$ について，その像

$$\operatorname{Im}\varphi := \{\varphi(a) \mid a \in R\}$$

は S の和と積でもって環になる．更に φ から次の環同型が定まる．

$$\overline{\varphi}\colon R/\operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}\varphi, \quad a + \operatorname{Ker}\varphi \longmapsto \varphi(a).$$

レポート問題11 & 次回について

全般的な注意

- 講義ノートのp.71にレポート問題11があります.
  締切は7/23の13時です. NUCTで提出して下さい.
- スマートフォン等でスキャンしたレポートは, PDFに変換して頂けると助かります.
  変換方法はNUCT「リソース」の「スキャンファイルのPDF変換.pdf」参照.

次回について.

- 次回は7/30 (金)です.
  一コマ目 (09:30–10:30) は§12 可換環と組み合わせ論 後半を説明します.
  二コマ目 (10:45–11:45) は今回説明した§12 前半の発表用問題について,
  希望者に解答を発表してもらいます.

一コマ目はここまでです.