2021/07/09

数学演習IX・X 柳田クラス
第10回 Chapter 8 Young tableaux (Young盤)

柳田 伸太郎

このスライドはNUCTの「リソース」においてあります.

Zoomに自分の苗字と名前の両方が表示されるようにして下さい.

8.1 Young盤

今回の目標はYoung束のHasse図式上の歩行の数え上げである.

定義. λを$n \in \mathbb{N}$の分割とする. 枠λの標準Young盤 (standard Young tableau)とは, λのYoung図形の各正方形に$1, 2, \ldots, n$を一つずつ書き込んだもので, 各行右に, 及び各列下に見ていくと単調増加なもののことである.

例. 枠$(2, 2, 1)$の標準Young盤は以下の五つ.

$$
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}
$$

定義. 分割λに対して, 枠λの標準Young盤の個数をf^{λ}と書く.

上の例から$f^{(2,2,1)} = 5$である.

定理 8.1 (Frame-Robinson-Thrall, **フック長公式). ** λ が $n \in \mathbb{N}$ の分割の時,

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{s\in\lambda} h(s)}.$$

但し $s \in \lambda$ は λ の Young 図形の正方形を意味する．また $h(s)$ は s の**フック長** (hook length) と呼ばれる量で, 次で定義される.

$$\begin{aligned} h(s) := 1 &+ (s\text{と同じ行にあって}s\text{より右にある正方形の数}) \\ &+ (s\text{と同じ列にあって}s\text{より下にある正方形の数}). \end{aligned}$$

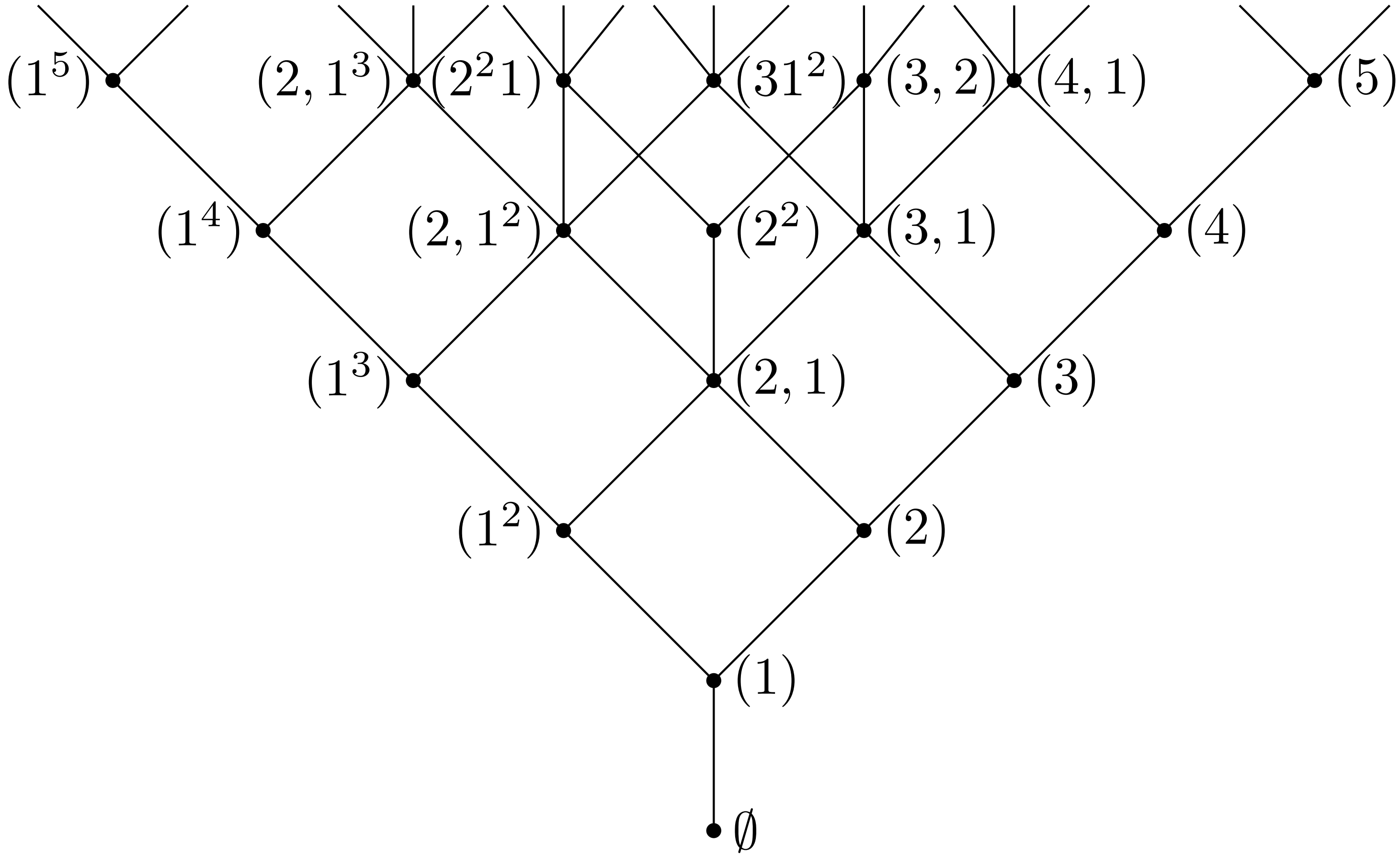
例. 上記の $\lambda = (2,2,1)$ の場合, 各 $s \in \lambda$ のフック長 $h(s)$ を書き込むと下図のようになり, フック長公式を使って計算すると

4	2
3	1
1	

$$\frac{5!}{4\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 1} = 5.$$

8.2 Young 束の Hasse 歩行

Young束 Y は次数付き半順序集合だが，無限集合である．各 $i \in \mathbb{N}$ に対して i 番目のレベル Y_i は i の分割に対応するYoung図形からなる．Y のHasse図を途中まで Y_5 まで書くと以下のようになる．



半順序集合 P のHasse図上の歩行を P のHasse歩行と呼ぼう．Young束 Y のHasse図は単純グラフ (ループも重複辺もない) であり，従って Y のHasse歩行は分割の列

$\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^l$ と同一視できる．各 $i = 0, 1, \ldots, n-1$ について
(1) $\left|\lambda^i\right| = \left|\lambda^{i+1}\right| - 1$ の場合 U
(2) $\left|\lambda^i\right| = \left|\lambda^{i+1}\right| + 1$ の場合 D
と書くと，長さ n の歩行 W に対して U と D が並んだ長さ n の**ワード** (word) ができる．各遷移 $\lambda^i \to \lambda^{i+1}$ に対して，上記の (1), (2) に応じて $A_i = U$ または D として，

$$A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1$$

と並べたものを，考えている歩行の**型** (type) と呼ぶ．

例. $W = \emptyset, (1), (2), (1), (1^2), (1^3), (2, 1^2), (2^2, 1), (2^2), (2, 1), (3, 1), (4, 1)$ の型は

$$UUDDUUUDUU = U^2D^2U^4DU^2.$$

以下 $\lambda^0 = \emptyset$ の歩行，つまり始点が空数列の歩行のみを考える．

定義. $w = A_n A_{n-1} \cdots A_1$ を U 及び D からなる長さ n のワードとし，また λ を n の分割とする．空数列 $\emptyset$ を始点とし，終点を λ とする Young 束 Y の Hasse 歩行で型が w であるものの数を次の記号であらわす．

$$\alpha(w, \lambda). \tag{8.2.1}$$

まず $\alpha(w, \lambda) \neq 0$ となるための条件を求めよう．

補題 8.2. λを$n \in \mathbb{N}$の分割とし，また$w = D^{s_k}U^{r_k}\cdots D^{s_2}U^{r_2}D^{s_1}U^{r_1}$，$r_i, s_i \in \mathbb{N}$とする．$\emptyset$から$\lambda$への型$w$の歩行が存在する為の必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{k}(r_i - s_i) = n, \quad \sum_{i=1}^{j}(r_i - s_i) \geq 0 \quad (1 \leq \forall j \leq k).$$

証明. 略．十分条件は発表用問題 8.3. □

定義. 補題 8.2の条件を満たすワードwを有効λワード(valid λ-word) と呼ぶ.

定理 8.4. λを$n \in \mathbb{N}$の分割とし，$w = A_n A_{n-1} \cdots A_1$を有効$\lambda$ワードとする.
$S_w := \{i = 1, 2, \ldots, n \mid A_i = D\}$とし，各$i \in S_w$に対して

$$a_i := A_i \text{の右側にある} D \text{の数}, \quad b_i := A_i \text{の右側にある} U \text{の数}$$

とする．この時

$$\alpha(w, \lambda) = f^{\lambda} \prod_{i \in S_w}(b_i - a_i).$$

系 8.5 (証明は発表用問題 8.4)**.** 任意の$n \in \mathbb{N}$について

$$\sum_{\substack{\lambda:\ \text{分割} \\ |\lambda| = n}} (f^{\lambda})^2 = n!.$$

8.3　定理 8.4の証明

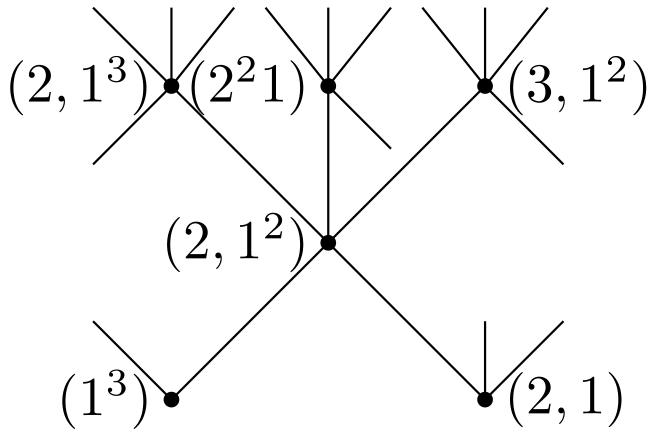
以前, Spernerの定理 (系 4.8) を線形代数的に証明したが, それと類似の議論をする.
Young束YのレベルY_iを基底とする実線形空間を$\mathbb{R}Y_i$と書く. 線形写像を次で定める.

$$U_i\colon \mathbb{R}Y_i \longrightarrow \mathbb{R}Y_{i+1}, \quad U_i(\lambda) := \sum_{|\mu|=i+1,\, \lambda<\mu} \mu,$$

$$D_i\colon \mathbb{R}Y_i \longrightarrow \mathbb{R}Y_{i-1}, \quad D_i(\lambda) := \sum_{|\nu|=i-1,\, \nu<\lambda} \nu.$$

例. $\lambda = (2, 1^2)$にU_4とD_4を適用すると

$$U_4(2,1^2) = (2,1^3) + (2^2,1) + (3,1^2), \quad D_4(2,1^2) = (1^3) + (2,1).$$



補題 8.3. 任意の$i \in \mathbb{N}$に対して

$$D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i = \mathrm{id}_{\mathbb{R}Y_i}\ .$$

証明はレポート問題 10.
線形写像$U, D : \mathbb{R}Y \to \mathbb{R}Y$を, それぞれ$U_i, D_i$達の直和で定義する.

$$U := \oplus_{i\geq 0} U_i, \quad D_i := \oplus_{i\geq 1} D_i. \tag{8.3.1}$$

補題 8.3から次が成立する.

$$DU - UD = \mathrm{id}_{\mathbb{R}Y}\ . \tag{8.3.2}$$

これを繰り返し使うと, 任意の$i \in \mathbb{N}$について次が成立する.

$$DU^i = U^i D = iU^{i-1}. \tag{8.3.3}$$

定理 *8.4*の証明. 与えられているワード$w = A_n A_{n-1} \cdots A_1$, $A_i \in \{U, D\}$に対して, A_iを(8.3.1)の線形写像UまたはDで置き換えて得られる線形写像$\mathbb{R}Y \to \mathbb{R}Y$を同じ記号$w$で表す. (8.3.2)を使うと$DU$を$UD + \mathrm{id}$に書き直せる. これを繰り返すと, 線形写像$w \colon \mathbb{R}Y \to \mathbb{R}Y$は

$$w = \sum_{i-j=m} r_{i,j}(w) U^i D^j, \quad r_{i,j}(w) \in \mathbb{Z} \tag{8.3.4}$$

の形に書き直せる．但し

$$m := (\text{ワード}\,w\,\text{中の}\,U\,\text{の数}) - (\text{ワード}\,w\,\text{中の}\,D\,\text{の数})$$

であり，$i < 0$ または $j < 0$ なら $r_{i,j}(w) = 0$ とする．係数 $r_{i,j}(w)$ は書き直しの順番によらず，ワード w から一意に定まることが示せる (テキスト [S, p.108 (8.4)] 周辺を参照)．(8.3.4) に左から U を合成すると $Uw = \sum_{i-j=n} r_{i,j}(w)U^{i+1}D^j$ となるから，$r_{i,j}(w)$ の一意性より

$$r_{i,j}(Uw) = r_{i-1,j}(w). \tag{8.3.5}$$

一方，(8.3.4) に左から D を合成して (8.3.3) を用いると

$$Dw = \sum_{i-j=m} r_{i,j}(w)DU^iD^j = \sum_{i-j=m} r_{i,j}(w)(U^iD^{j+1} + iU^{i-1}D^j)$$

となるから，$r_{i,j}(w)$ の一意性より

$$r_{i,j}(Dw) = r_{i,j-1}(w) + (i+1)r_{i+1,j}(w). \tag{8.3.6}$$

こうして得られた (8.3.5) と (8.3.6) で $j = 0$ とすると

$$r_{i,0}(Uw) = r_{i-1,0}(w), \quad r_{i,0}(Dw) = (i+1)r_{i+1,0}(w). \tag{8.3.7}$$

これを繰り返し使うと, 定理 8.4主張中のS_w及びa_i, b_iを用いて次の等式が示せる (問題 8.6).

$$r_{n,0}(w) = \prod_{i \in S_w} (b_i - a_i). \tag{8.3.8}$$

さて, (8.3.4)の線形写像$w \colon \mathbb{R}Y \to \mathbb{R}Y$で$\emptyset$を写そう. $j \in \mathbb{Z}_{>0}$なら$D^j(\emptyset) = 0$だから

$$w(\emptyset) = r_{n,0}(w) U^n(\emptyset) \in \mathbb{R}Y.$$

ここで$w(\emptyset)$を展開した時のλの係数は, (8.2.1)で定義した$\alpha(w, \lambda)$. 同様に$U^n(\emptyset)$の展開におけるλの係数は$\alpha(U^n, \lambda)$. 従って上の等式から$\alpha(w, \lambda) = r_{n,0}(w)\alpha(U^n, \lambda)$. すると発表用問題 8.2前半の$\alpha(U^n, \lambda) = f^\lambda$から

$$\alpha(w, \lambda) = r_{n,0}(w) f^\lambda.$$

これと(8.3.8)から定理 8.4が従う. □

発表用問題 8.6. (8.3.7)を用いて(8.3.8)を示せ.

レポート問題10 & 次回について

全般的な注意

- 講義ノートのp.61にレポート問題10があります.
  締切は7/16の13時です. NUCTで提出して下さい.
- スマートフォン等でスキャンしたレポートは, PDFに変換して頂けると助かります.
  変換方法はNUCT「リソース」の「スキャンファイルのPDF変換.pdf」参照.

次回について.

- 次回は7/16 (金)です.
  一コマ目 (09:30–10:30) は§12 可換環と組み合わせ論 前半を説明します.
  二コマ目 (10:45–11:45) は今回説明した§8 後半の発表用問題について,
  希望者に解答を発表してもらいます.

一コマ目はここまでです.