2021/07/02

数学演習IX・X　柳田クラス
第9回　Chapter 7　Enumeration Under Group Action
(群作用がある場合の数え上げ, その2/2)

柳田 伸太郎

このスライドはNUCTの「リソース」においてあります.

Zoomに自分の苗字と名前の両方が表示されるようにして下さい.

7.4 Pólyaの定理の証明

有限集合Xへの部分群$G \subset \mathfrak{S}_X$の作用を考え，色の集合を$C = \{r_1, r_2, \dots\}$とし，$f\colon X \to C$で色付けを表す．$i_1, i_2, \dots \in \mathbb{N}$に対して

$$\kappa(i_1, i_2, \dots) := \left|\{f\colon X \to C \mid |f^{-1}(r_j)| = i_j,\ \forall j = 1, 2, \dots\}/G\right| \tag{7.4.1}$$

とする．つまり，これは各$r_j \in C$をi_j回用いるような色付けf達を，Gで移りあうものは同一視して数え上げたものである．そしてCの元r_j達を (可換な) 変数として用いて，次の母函数を考える:

$$F_G(C) := \sum_{i_1, i_2, \dots \in \mathbb{N}} \kappa(i_1, i_2, \dots) r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots . \tag{7.4.2}$$

$n := |X|$とする．$\pi \in \mathfrak{S}_X$をサイクルの積で$\pi = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_l$と表した時に長さ$i$のサイクルが$c_i$個現れる場合，

$$c_i(\pi) := c_i, \quad \mathrm{type}(\pi) := (c_1, c_2, \dots, c_n) \tag{7.4.3}$$

と書き，$\mathrm{type}(\pi)$をπの**サイクルタイプ**と呼ぶ.

発表用問題 7.6. 任意の二元$\pi, \rho \in \mathfrak{S}_n$について$\pi$と$\rho$は共役 $\iff$ $\mathrm{type}(\pi) = \mathrm{type}(\rho)$.

この $\mathrm{type}(\pi) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ を用いて，可換な変数 $z_1, z_2, \dots, z_n$ の単項式 Z_π を

$$Z_\pi = Z_\pi(z_1, z_2, \dots, z_n) := z_1^{c_1} z_2^{c_2} \cdots z_n^{c_n} \tag{7.4.4}$$

で定め，更に部分群 $G \subseteq \mathfrak{S}_X$ に対して多項式 Z_G を次で定める:

$$Z_G = Z_G(z_1, z_2, \dots, z_n) := \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} Z_\pi. \tag{7.4.5}$$

定理 7.7 (Pólya の定理)**.** 以上の記号のもと，

$$F_G(C) = Z_G\big(p_1[C], p_2[C], \dots, p_n[C]\big), \quad p_k[C] := r_1^k + r_2^k + \cdots .$$

例 7.8. X は正方形の頂点集合で G が 4 次巡回群の場合を考える．色は全部で 4 色として，$C = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ とすると，Pólya の定理 7.7 から

$$\begin{aligned}
&F_G(r_1, r_2, r_3, r_4) \\
&= \frac{1}{4}\Big((r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^4 + (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)^2 + 2(r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 + r_4^4)\Big) \\
&= (r_1^4 + \cdots) + (r_1^3 r_2 + \cdots) + 2(r_1^2 r_2^2 + \cdots) + 3(r_1^2 r_2 r_3 + \cdots) + 6 r_1 r_2 r_3 r_4.
\end{aligned}$$

*Pólya*の定理 *7.7*の証明*.* $n := |X|$とし, $I := (i_1, i_2, \dots)$, $i_j \in \mathbb{N}$, $i_1 + i_2 + \cdots = n$を一つ取って固定する.　このIに対し

$$\mathcal{C}_I := \left\{ f \colon X \to C \mid |f^{-1}(r_j)| = i_j, \forall j = 1, 2, \dots \right\}$$

とすれば, Gの$\{f \colon X \to C\}$上の作用は$\mathcal{C}_I$を保ち, κと母関数の定義(7.4.1), (7.4.2)より

$$F_G(C) = \sum_I |\mathcal{C}_I / G| \, r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots .$$

各$\pi \in G$に対して$\mathrm{Fix}(\pi_I) := \{f \in \mathcal{C}_I \mid \pi.f = f\}$とすると, Burnsideの補題 7.2から

$$|\mathcal{C}_I / G| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi_I)| .$$

$|\mathrm{Fix}(\pi_I)|$を計算したい. $f \colon X \to C$が$f \in \mathrm{Fix}(\pi_I)$となる為には次の二条件が必要十分.

(a) πをサイクルの積で$\pi = \sigma_1 \sigma_2 \cdots$と表した時に, 各サイクル $\sigma_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{l_k}^{(k)})$ に現れる$x_l^{(k)} \in X$達は同一の色で色付けられる, つまり $f(x_1^{(k)}) = f(x_2^{(k)}) = \cdots = f(x_{l_k}^{(k)})$.

(b) 各$j = 1, 2, \dots$に対して$\left|f^{-1}(r_j)\right| = i_j$.

ここで(7.4.3)の$c_j(\pi)$を用いて

$$H_\pi := \prod_{j=1}^{n} p_j[C]^{c_j(\pi)} = \prod_{j=1}^{n} (r_1^j + r_2^j + \cdots)^{c_j(\pi)} \tag{7.4.6}$$

を考える．この多項式を展開した時の単項式$r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots$の係数を求めると，条件(a)と(b)を使うことで，$|\mathrm{Fix}(\pi_I)|$と等しいことが分かる (詳細は略).
以上より

$$H_\pi = \sum_I |\mathrm{Fix}(\pi_I)|\, r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots .$$

あとは母函数の定義 (7.4.2) と(7.4.4)及び(7.4.5)を思い出せば

$$\begin{aligned} F_G(C) &= \sum_I |\mathcal{C}_I/G|\, r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots = \sum_I \frac{1}{|G|} \sum_{\pi\in G} |\mathrm{Fix}(\pi_I)|\, r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi\in G} H_\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi\in G} Z_\pi(p_1[C], p_2[C], \ldots) = Z_G(p_1[C], p_2[C], \ldots). \end{aligned} \tag{7.4.7}$$

□

7.5　対称群の共役類の個数

Pólyaの定理 7.7 で$G = \mathfrak{S}_X$の場合を考えよう．$l := |X|$と書くと$G \simeq \mathfrak{S}_l$で，この場合の$F_{\mathfrak{S}_l}(C)$は区別しないl個のものを色Cを使って色付ける場合の数である．定理の証明中の(7.4.6)と(7.4.7)から，$F_{\mathfrak{S}_l}$は次で与えられる．

$$F_{\mathfrak{S}_l}(C) = \frac{1}{l!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_l} H_\pi = \frac{1}{l!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_l}\prod_{j=1}^{l}(r_1^j + r_2^j + \cdots)^{c_j(\pi)}. \tag{7.5.1}$$

例 7.11. (7.5.1)を$l = 1, 2, 3, 4$の場合に書き出すと，$p_k := r_1^k + r_2^k + \cdots$として，

$$F_{\mathfrak{S}_1}(C) = H_e = p_1,$$

$$F_{\mathfrak{S}_2}(C) = \frac{1}{2}(H_e + H_{(1,2)}) = \frac{1}{2}\big(p_1^2 + p_2\big),$$

$$F_{\mathfrak{S}_3}(C) = \frac{1}{6}(H_e + H_{(1,2)} + H_{(1,3)} + H_{(2,3)} + H_{(1,2,3)} + H_{(1,3,2)}) = \frac{1}{6}\big(p_1^3 + 3p_1p_2 + 2p_3\big),$$

$$\begin{aligned}F_{\mathfrak{S}_4}(C) &= \frac{1}{24}\Big(H_e + \sum_{1\le i<j\le 4} H_{(i,j)} + H_{(1,2)(3,4)} + H_{(1,3)(2,4)} + H_{(1,4)(2,3)} \\ &\qquad + \sum_{1\le i<j<k\le 4}(H_{(i,j,k)} + H_{(i,k,j)}) + \sum_{2\le i\ne j\ne k\le 4} H_{(1,i,j,k)}\Big) \\ &= \frac{1}{24}\big(p_1^4 + 6p_1^2p_2 + 3p_2^2 + 8p_1p_3 + 6p_4\big).\end{aligned}$$

一方，$F_{\mathfrak{S}_l}(C)$ は区別しない l 個のものを色 C を使って色付ける場合の数だから，直接

$$F_{\mathfrak{S}_l}(C) = \sum_{i_1+i_2+\cdots=l} r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots \tag{7.5.2}$$

とも計算できる．後の為に $F_{\mathfrak{S}_l}(C)$ の母函数を与えておこう．

$$\sum_{l\geq 0} F_{\mathfrak{S}_l}(C) x^l = \frac{1}{(1-r_1x)(1-r_2x)\cdots}. \tag{7.5.3}$$

但し右辺は x の冪級数として $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ のように展開したものとみなす．

発表用問題 7.10. (7.5.2) を使って (7.5.3) を示せ．

(7.5.1) と (7.5.2) から次の等式が得られる．

$$\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_l} \prod_{j=1}^{l} (r_1^j + r_2^j + \cdots)^{c_j(\pi)} = l! \sum_{i_1+i_2+\cdots=l} r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots .$$

この等式の意味を考えてみよう．数列 $c = (c_1, c_2, \dots)$，$c_i \in \mathbb{N}$，$\sum_{j=1}^{l} c_j = l$ が与えられたとして，両辺の係数について

$$(r_1^{c_1} r_2^{c_2} \cdots \text{ の係数}) = |\{\pi \in \mathfrak{S}_l \mid \mathrm{type}(\pi) = c\}|$$

となることに注意する．但し$\mathrm{type}(\pi)$はπのサイクルタイプ(7.4.3)．問題 7.6よりサイクルタイプは対称群$\mathfrak{S}_l$の共役類と同一視できるから，

$$(r_1^{c_1} r_2^{c_2} \cdots \text{ の係数}) = |X_c|\,, \quad X_c := (\text{サイクルタイプ } c \text{ に対応する } \mathfrak{S}_l \text{ の共役類})$$

となる．この数の明示式が以下の定理 7.12で与えられる．

定理 7.12. 正整数$l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$を固定し，数列$c = (c_1, c_2, \dots)$，$c_j \in \mathbb{N}$，$\sum_{j \geq 1} j c_j = l$が一つ与えられたとする．この時，サイクルタイプが$c$であるような$\mathfrak{S}_l$の元の個数$|X_c|$は

$$|X_c| = \frac{l!}{1^{c_1} c_1! 2^{c_2} c_2! \cdots}.$$

証明. 略. □

最後に(7.4.5)の多項式$Z_{\mathfrak{S}_l}$の母函数を求めよう:

$$Z_{\mathfrak{S}_l}(z_1, z_2, \dots) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_l} z_1^{c_1(\pi)} z_2^{c_2(\pi)} \cdots .$$

定理 7.13.

$$\sum_{l \geq 0} Z_{\mathfrak{S}_l}(z_1, z_2, \dots) x^l = \exp\Bigl(z_1 x + \frac{1}{2} z_2 x^2 + \frac{1}{3} z_3 x^3 + \cdots\Bigr).$$

証明. テキストの証明 [S, 7.13 Theorem] とは別の方法で示す. (7.5.3) と Pólya の定理 7.7 から, $p_k = p_k[C] = r_1^k + r_2^k + \cdots$ として

$$\sum_{l\geq 0} Z_G(p_1, p_2, \dots)x^l = \prod_{j\geq 1}\frac{1}{1-r_jx}.$$

ここで下の問題 7.11 から冪級数の等式

$$\frac{1}{1-x} = \exp\Bigl(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}x^n\Bigr) \tag{7.5.4}$$

が成立するので,

$$\prod_{j\geq 1}\frac{1}{1-r_jx} = \prod_{i\geq 1}\exp\Bigl(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}(r_ix)^n\Bigr) = \exp\Bigl(\sum_{i\geq 1}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}(r_ix)^n\Bigr) = \exp\Bigl(\sum_{n\geq 1}\sum_{i\geq 1}\frac{1}{n}(r_ix)^n\Bigr)$$

$$= \exp\Bigl(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sum_{i\geq 1}r_i^nx^n\Bigr) = \exp\Bigl(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_nx^n\Bigr)$$

$p_1, p_2, \dots$ を $z_1, z_2, \dots$ に置き換えて結論が得られる. □

発表用問題 7.11. $f(x) := \frac{1}{1-x}$ の対数微分 $\frac{d}{dx}\log f(x)$ を考えることで (7.5.4) を導け.

レポート問題9 & 次回について

全般的な注意

- 講義ノートのp.56にレポート問題9があります.
  締切は7/09の13時です. NUCTで提出して下さい.
- スマートフォン等でスキャンしたレポートは, PDFに変換して頂けると助かります.
  変換方法はNUCT「リソース」の「スキャンファイルのPDF変換.pdf」参照.

次回について.

- 次回は7/09 (金)です.
  一コマ目 (09:30–10:30) は§8 Young盤を説明します.
  二コマ目 (10:45–11:45) は今回説明した§7 後半の発表用問題について,
  希望者に解答を発表してもらいます.

一コマ目はここまでです.