2021/06/18

数学演習IX・X 柳田クラス
第8回 Chapter 7 Enumeration Under Group Action
(群作用がある場合の数え上げ, その1/2)

柳田 伸太郎

このスライドはNUCTの「リソース」においてあります.

Zoomに自分の苗字と名前の両方が表示されるようにして下さい.

7.1 Burnsideの補題と色付けの数え上げ

集合Xに対して$\mathfrak{S}_X$でその置換群を表す.
群Gが集合Xに作用する $\iff$ 群準同型$G \to \mathfrak{S}_X$が存在する (§5.1参照).
特に任意の部分群$G \subseteq \mathfrak{S}_X$は$X$に作用する.

補題 7.2 (Burnsideの補題, またはCauchy-Frobeniusの補題)**.** Yを有限集合とし, $G \subseteq \mathfrak{S}_Y$を部分群とする. 各$\pi \in G$に対して

$$\mathrm{Fix}(\pi) := \{y \in Y \mid \pi(y) = y\}$$

と定める. するとG軌道全体がなす集合Y/Gの元の個数は

$$|Y/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)|. \tag{7.1.1}$$

例 7.3. $Y = \{1, 2, 3, 4\}$として$\mathfrak{S}_Y$を4次対称群$\mathfrak{S}_4$と同一視する.
サイクル (巡回置換) の記号を用いて$\mathfrak{S}_4$の部分群Gを

$$G := \{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$$

で定める. $\pi \in G$と$y \in Y$に対して$\pi.y \in Y$で作用を書くと

$$e.1 = 1, \quad (1, 2)(3, 4).1 = 2, \quad (1, 3)(2, 4).1 = 3, \quad (1, 4)(2, 3).1 = 4.$$

よって$Y/G = \{Y\}$. 一方で(7.1.1)の右辺について,

$$\mathrm{Fix}(e) = Y, \quad \mathrm{Fix}\big((1,2)(3,4)\big) = \mathrm{Fix}\big((1,3)(2,4)\big) = \mathrm{Fix}\big((1,4)(2,3)\big) = \emptyset.$$

よって

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|\mathrm{Fix}(\pi)| = \frac{1}{4}(4+0+0+0) = 1 = |\{Y\}| = |Y/G|$$

となり, 確かにGについて(7.1.1)が成立する.
次に

$$G' := \{e, (1,2), (3,4), (1,2)(3,4)\}$$

の作用を調べると

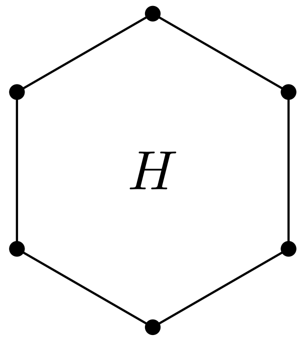
$$\begin{aligned} e.1 = (3,4).1 = 1, &\quad (1,2).1 = (1,2)(3,4).1 = 2, \\ e.3 = (1,2).3 = 3, &\quad (3,4).3 = (1,2)(3,4).3 = 4 \end{aligned}$$

より$Y/G' = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$. 一方で(7.1.1)の右辺について,

$$\mathrm{Fix}(e) = Y, \quad \mathrm{Fix}\big((1,2)\big) = \{3,4\}, \quad \mathrm{Fix}\big((3,4)\big) = \{1,2\}, \quad \mathrm{Fix}\big((1,2)(3,4)\big) = \emptyset$$

より $\frac{1}{|G'|}\sum_{\pi\in G'}|\mathrm{Fix}(\pi)| = \frac{1}{4}(4+2+2+0) = 2$. 従って$G'$についても(7.1.1)が成立.

例 7.4. 正六角形 H の 6 頂点に n 種類の色を使って色付けする. 頂点を巡回させて移りあう色付けを同一視すると, 何種類の色付けの仕方があるだろうか?



H を反時計回りに 60 度回転させることで得られる頂点の置換を π とすれば, 頂点の巡回全体のなす群 G は $G = \{\pi^i \mid i = 0, 1, \ldots, 5\}$ と書けて, 6 次巡回群 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ と同型である. G は同一視する前の色付け全体のなす集合 $\mathcal{C}_n$ に作用して, 求める場合の数は $|\mathcal{C}_n/G|$ である. そこで Burnside の補題 7.2 を使いたい. 各 $\pi^i \in G$ について $\mathrm{Fix}(\pi^i)$, つまり置換 π^i で動かない色付けの仕方を数えると

- $\pi^0 = e$ では全 $|\mathcal{C}_n| = n^6$ 通りが固定される.
- $\pi, \pi^5 = \pi^{-1}$ で動かないのは 6 頂点全てが同じ色の場合だから, 各々 n 通り.
- π^2, π^4 で動かないのは, 頂点を反時計回りに見ていった時に $ababab$ と二色で交互に色付けされている場合で, 各々 n^2 通り.
- π^3 で動かないのは, 同様の意味で $abcabc$ と三色で色付けされている場合で, n^3 通り.

以上の計算とBurnsideの補題 7.2から

$$|\mathcal{C}_n/G| = \frac{1}{6}(n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n).$$

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の任意の元 σ はサイクルの積で

$$\sigma = (i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \ldots, i_{l_1}^{(1)})(i_1^{(2)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_{l_2}^{(2)}) \cdots (i_1^{(c)}, i_2^{(c)}, \ldots, i_{l_c}^{(c)}),$$
$$i_1^{(j)} < i_2^{(j)} < \cdots < i_{l_j}^{(j)}, \quad l_j \in \mathbb{Z}_{>0} \quad (j = 1, 2, \ldots, c), \quad l_1 + l_2 + \cdots + l_c = n$$

と書ける．書き方は複数あるが，$c \in \mathbb{Z}_{>0}$ は σ に対して一意である．この c を $c(\sigma)$ と書こう．

定理 7.5. X を有限集合，$G \subseteq \mathfrak{S}_X$ を部分群とする．X の各元を n 種類の色を使って色付けし，G の作用でうつりあう色付けは同一視すると，色付けの場合の数 $N_G(n)$ は

$$N_G(n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} n^{c(\pi)}.$$

但し $c(\pi)$ は $\pi \in \mathfrak{S}_X = \mathfrak{S}_{|X|}$ とみなしてサイクルの積で表した時の項数．

例 7.4はこの定理を $X = \{1, 2, \ldots, 6\}$，$G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \subset \mathfrak{S}_X = \mathfrak{S}_6$ に適用したもの．

7.2　数え上げの精密化

定理 7.5では色付けの総数を数え上げたが，より細かい数え上げ問題を考えよう．
有限集合Xへの部分群$G \subset \mathfrak{S}_X$の作用を考え，色の集合を$C = \{r_1, r_2, \ldots\}$とし，
$f\colon X \to C$で色付けを表す．$i_1, i_2, \ldots \in \mathbb{N}$に対して

$$\kappa(i_1, i_2, \ldots) := \left|\{f\colon X \to C \mid |f^{-1}(r_j)| = i_j,\ \forall j = 1, 2, \ldots\}/G\right|$$

とする．つまり，これは各$r_j \in C$をi_j回用いるような色付けf達を，Gで移りあうもの
は同一視して数え上げたものである．そしてCの元r_j達を (可換な) 変数として用いて，
次の母函数を考える:

$$F_G(C) := \sum_{i_1, i_2, \ldots \in \mathbb{N}} \kappa(i_1, i_2, \ldots) r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots .$$

定理の結論に用いる記号を用意する．$n := |X|$とする．$\pi \in \mathfrak{S}_X$をサイクルの積で
$\pi = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ と表した時に長さiのサイクルがc_i個現れる場合，

$$c_i(\pi) := c_i, \quad \mathrm{type}(\pi) := (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

と書き，$\mathrm{type}(\pi)$をπの**サイクルタイプ**と呼ぶ．例えば$n = 11$の時に

$$\mathrm{type}\big((1,4,8)(2,7,11,5)(3)(6,10,9)\big) := (1,0,2,1,0,0,0,0,0,0,0).$$

問題 7.6 よりサイクルタイプは $\mathfrak{S}_n$ の共役類と一対一に対応する.

発表用問題 7.6. 任意の二元 $\pi, \rho \in \mathfrak{S}_n$ について π と ρ は共役 $\iff$ $\mathrm{type}(\pi) = \mathrm{type}(\rho)$.

この $\mathrm{type}(\pi) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ を用いて, 可換な変数 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ の単項式 Z_π を

$$Z_\pi = Z_\pi(z_1, z_2, \ldots, z_n) := z_1^{c_1} z_2^{c_2} \cdots z_n^{c_n}$$

で定め, 更に部分群 $G \subseteq \mathfrak{S}_X$ に対して多項式 Z_G を次で定める:

$$Z_G = Z_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) := \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} Z_\pi.$$

例 7.6. X が正方形の四頂点からなる集合で, G が X の回転からなる群 (4 次巡回群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) の場合, 反時計回りに $X = \{1, 2, 3, 4\}$ と番号づければ
$G = \{e = (1)(2)(3)(4), (1, 2, 3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4, 3, 2)\}$ だから

$$Z_G(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{4}(z_1^4 + z_2^2 + 2z_4).$$

Gに (中心を通る直線に関する) 鏡映変換達を付け加えて得られる群G' (位数8の二面体群$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) については,
$G \setminus G' = \{(1,2)(3,4), (1,3)(2)(4), (1,4)(2,3), (1)(3)(2,4)\}$なので

$$Z_{G'}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{4}(z_1^4 + 2z_1^2 z_2 + 3z_2^2 + 2z_4).$$

定理 7.7 (Pólya の定理). 以上の記号のもと,

$$F_G(C) = Z_G\big(p_1[C], p_2[C], \ldots, p_n[C]\big), \quad p_k[C] := r_1^k + r_2^k + \cdots .$$

特に$Z_G\big(p_1[C], p_2[C], \ldots, p_n[C]\big)$は$r_1, r_2, \ldots$ 達の整数係数の多項式である.

例 7.8. 例 7.6 の前半, つまりXは正方形の頂点集合でGが4次巡回群の場合を考える.
色は全部で4色として, $C = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$とすると, Pólya の定理 7.7 から

$$\begin{aligned} &F_G(r_1, r_2, r_3, r_4) \\ &= \frac{1}{4}\big((r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^4 + (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)^2 + 2(r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 + r_4^4)\big) \\ &= (r_1^4 + \cdots) + (r_1^3 r_2 + \cdots) + 2(r_1^2 r_2^2 + \cdots) + 3(r_1^2 r_2 r_3 + \cdots) + 6r_1 r_2 r_3 r_4. \end{aligned}$$

但し$\cdots$ は同じ形の冪を省略したもの.

例 7.6の後半, つまり二面体群$G' \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$の場合は

$$
\begin{aligned}
&F_{G'}(r_1, r_2, r_3, r_4) \\
&= \frac{1}{8}\Big((r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^4 + 2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) \\
&\qquad + 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)^2 + 2(r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 + r_4^4)\Big) \\
&= (r_1^4 + \cdots) + (r_1^3 r_2 + \cdots) + 2(r_1^2 r_2^2 + \cdots) + 2(r_1^2 r_2 r_3 + \cdots) + 3r_1 r_2 r_3 r_4.
\end{aligned}
$$

定理 7.7の証明は次回行う.

7.3 群の半直積

ここでは例 7.6で現れた群の半直積を扱う.

定義. HとNを群とし, $\mathrm{Aut}(N)$を群同型$N \to N$全体がなす群 (Nの自己同型群) とし, また$\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$を群準同型とする. $h \in H$に対し$\varphi_h := \varphi(h) \in \mathrm{Aut}(N)$と書く. この時, 集合としての直積$H \times N$は,

$$
(h_1, n_1) * (h_2, n_2) := (h_1 h_2, n_1 \varphi_{h_1}(n_2)) \quad (h_1, h_2 \in H,\ n_1, n_2 \in N)
$$

で定まる写像$*\colon (H \times N) \times (H \times N) \to H \times N$によって群になる. この群$(H \times N, *)$を$H$と$N$の (準同型$\varphi$による) 半直積と呼び, $H \ltimes_\varphi N$あるいは単に$H \ltimes N$と書く.

発表用問題 7.7. 上の定義で $H \ltimes_\varphi N := (H \times N, *)$ が実際に群であることを示せ.

発表用問題 7.8. H, N を群とする. $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ を自明な群準同型, 即ち任意の $h \in H$ に対し $\varphi(h) = \mathrm{id}_N$ とする. この時, 半直積 $H \ltimes_\varphi N$ は直積群 $H \times N$ と同型であることを示せ.

発表用問題 7.9. H と N を群とし, $\varphi\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ を群準同型とする. 半直積 $G := H \ltimes_\varphi N$ が以下の性質を満たすことを示せ.

(1) $H' := \{(h, e_N) \mid h \in H\}$ は H と同型な G の部分群. 但し $e_N \in N$ は単位元.
(2) $N' := \{(e_H, n) \mid n \in N\}$ は N と同型な G の正規部分群. 但し $e_H \in H$ は単位元.
(3) $G = N'H'$ かつ $N' \cap H' = \{e_G\}$. 但し $e_G \in G$ は単位元.

レポート問題8 & 次回について

全般的な注意

- 講義ノートのp.52にレポート問題8があります.
  締切は6/25の13時です. NUCTで提出して下さい.
- スマートフォン等でスキャンしたレポートは, PDFに変換して頂けると助かります.
  変換方法はNUCT「リソース」の「スキャンファイルのPDF変換.pdf」参照.

次回について.

- 来週6/25は休講です.
- 次回は7/02 (金)です.
  一コマ目 (09:30–10:30) は§7 群作用がある場合の数え上げ その 2を説明します.
  二コマ目 (10:45–11:45) は今回説明した§7 前半の発表用問題について,
  希望者に解答を発表してもらいます.

一コマ目はここまでです.