2021/06/04

数学演習IX・X　柳田クラス
第7回　Chapter 6　Young Diagrams and q-Binomial Coefficients. (Young図形とq二項定理)

柳田 伸太郎

このスライドはNUCTの「リソース」においてあります.

Zoomに自分の苗字と名前の両方が表示されるようにして下さい.

6.1 分割, Young図形, Young束

整数の分割の概念を導入しよう.

定義. 非負整数 $n \in \mathbb{N}$ の分割とは広義単調減少の非負数列であって総和が n のもののことを言う. つまり

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots), \quad \lambda_i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i \geq 1} \lambda_i = n$$

正の λ_i を分割 λ のパート と呼び, パートの個数を λ の長さと呼んで $\ell(\lambda)$ で表す. また $|\lambda| := \sum_{i \geq 1} \lambda_i = n$ と書いて, それを分割 λ のサイズと呼ぶ.

空数列 $\emptyset = ()$ は 0 の分割とみなす.
同じパートを $(3,3,3,2,2,1,1,1,1) = (3^3, 2^2, 1^4)$ の様に略記する.
分割とそれに 0 を付け加えたものは同一視する. 例えば $(5, 2^3, 1) = (5, 2^3, 1, 0, 0, 0, 0)$

非負整数nの分割の総数$p(n)$を分割数と呼ぶ.

$$p(0) = |\{\emptyset\}| = 1, \quad p(1) = |\{(1)\}| = 1, \quad p(2) = \left|\{(2), (1^2)\}\right| = 2,$$
$$p(3) = \left|\{(3), (2,1), (1^3)\}\right| = 3,$$
$$p(4) = \left|\{(4), (3,1), (2^2), (2,1^2), (1^4)\}\right| = 5,$$
$$p(5) = \left|\{(5), (4,1), (3,2), (3,1^2), (2^2,1), (2,1^3), (1^5)\}\right| = 7,$$
$$\sum_{n\geq 0} p(n)t^n = \prod_{r\geq 0} \frac{1}{1-t^r}.$$

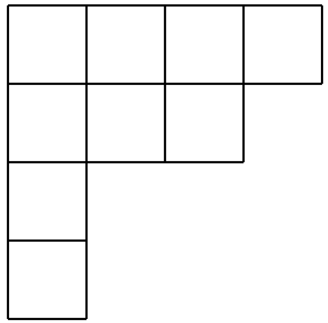
次に分割からなる半順序集合を一つ導入しよう.

定義. $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$に対し, 長さがm以下かつ最大のパートがn以下の分割全ての集合を$L(m,n)$と書く. つまり,

$$L(m,n) := \{\lambda \mid \text{分割},\ \ell(\lambda) \leq m,\ \lambda_1 \leq n\}.$$

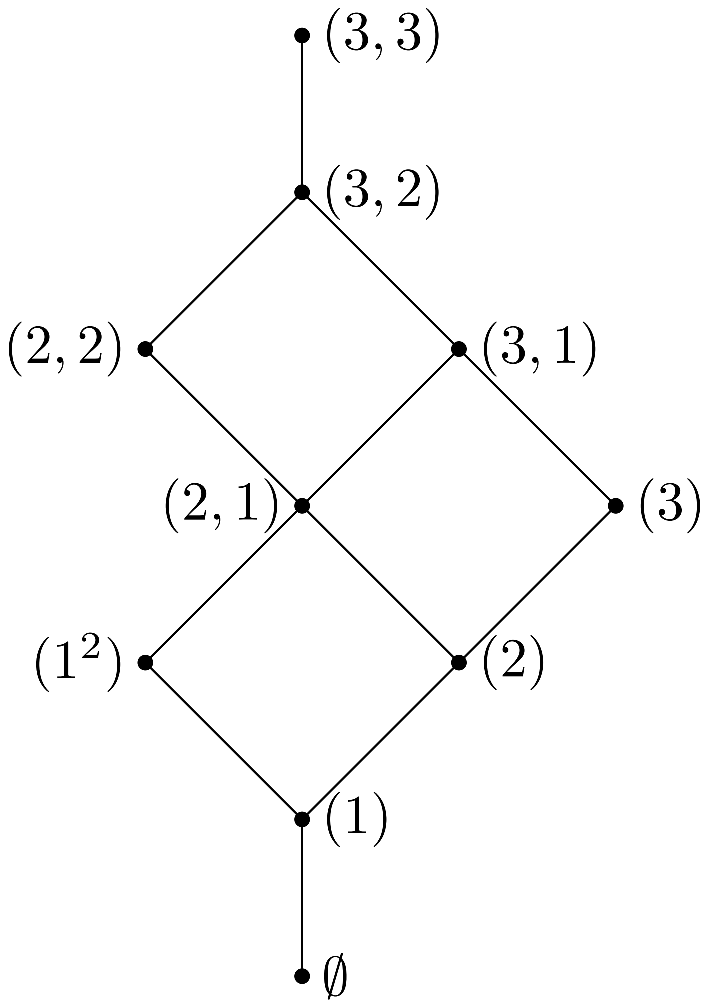
$\lambda, \mu \in L(m,n)$に対し, 全ての$i = 1, 2, \ldots$について$\lambda_i \leq \mu_i$となる時に$\lambda \leq \mu$と定める.
この$\leq$は$L(m,n)$上の半順序を定める.
半順序集合$(L(m,n), \leq)$をYoung束 (ヤングそく) と呼び, 以下$L(m,n)$と略記する.

分割λに対して，各行にλ_i個の正方形を並べて表示したものをλのYoung図形と呼ぶ．例えば$(4,3,1,1)$のYoung図形は次の図のようになる．分割λに対して，$|\lambda| = \sum_{i\geq 1}\lambda_i$はそのYoung図形の箱の総数に等しい．



以下では分割とそのYoung図形を同一視する．Young束をYoung図形の言葉で言い直すと，長方形のYoung図形$(n^m) = (n, n, \ldots, n)$に含まれる分割$\lambda$達のなす集合$L(m,n)$に，対応するYoung図形が$\lambda \subseteq \mu$と包含される場合に$\lambda \leq \mu$とすることで定まる半順序を与えたものである．

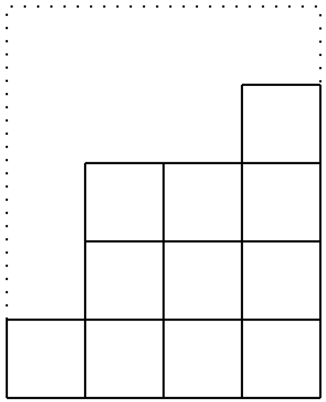
例. Young束$L(2,3)$のHasse図を書いてみよう. Young図形$(3^2)=(3.3)$に含まれるYoung図形を書き出すと$\emptyset$, (1), (2), (3), (1^2), $(2,1)$, (2^2), $(3,1)$, $(3,2)$, (3^2)の10個.
半順序がYoung図形の包含関係であることに注意してHasse図を書くと,



このHasse図より半順序集合$L(2,3)$は階数に関して対称である.

命題 6.2. Young束$L(m,n)$は階数mnの，階数に関して対称な次数付き半順序集合である．また各$\lambda \in L(m,n)$の階数は$|\lambda|$である．

証明. 階数対称性のみ示す．$\lambda \in L(m,n)$に対して，Young図形の意味で$(n^m) \setminus \lambda$を考えて上下を逆転させせると分割が得られる (下図参照)．この分割を$\overline{\lambda}$と書こう．対応$\lambda \mapsto \overline{\lambda}$は$L(m,n)$から自分自身への全単射を定める．この全単射と$|\lambda| + |\overline{\lambda}| = mn$から階数対称性が従う．



$$L(5,4)$$
$$\lambda = (4,2,1,1) \subset (4^5)$$
$$\overline{\lambda} = (4,3,3,1)$$

□

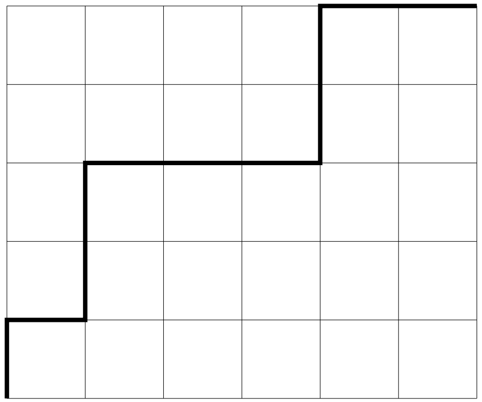
発表用問題 6.1. $\lambda \in L(m,n)$の階数が$|\lambda|$であることを示せ．

実は更に，Young束$L(m,n)$は階数に関してunimodalであり，かつSperner性を持つ (系6.6)．その証明が今回の主目標である．

6.2 Young束とq二項係数

命題 6.3. $|L(m,n)| = \binom{m+n}{m}$.

略証. 以下のようにYoung図形と折れ線が一対一に対応することから従う.



$L(5,6)$
$\lambda = (4,4,1,1) \subset (6^5)$

□

Young束$L(m,n)$の元で階数iのものの個数を次のように書く:

$$p_i(m,n) := p_i(L(m,n)) = |\{\lambda \in L(m,n) \mid \text{階数}\, i\}|\,.$$

階数母函数は, 母函数の変数をqと書くと$\sum_{i \geq 0} p_i(m,n) q^i$となる.

定理 6.6. $k, j \in \mathbb{N}$, $j \leq k$ と変数 q に対して,

$$[k]_q := 1 + q + \cdots + q^{k-1}, \quad [k]_q! := [1]_q[2]_q \cdots [k]_q,$$
$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q := \frac{[k]_q!}{[j]_q![k-j]_q!} = \frac{[k]_q[k-1]_q \cdots [k-j+1]_q}{[j]_q[j-1]_q \cdots [1]_q}$$

と定める．特に $\left[\begin{smallmatrix} k \\ j \end{smallmatrix}\right]_q$ を q **二項係数** (q-binomial coefficient) と呼ぶ．すると

$$\sum_{i \geq 0} p_i(m, n) q^i = \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q.$$

特に q 二項係数は q の多項式である.

二項係数 $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ は次の漸化式を満たす: (Pascale の三角形)

$$\binom{k}{j} = \binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1}$$

q 二項係数も, 上記の漸化式の q 変形である, 次の漸化式を満たす.

補題 6.5. $k \geq 1$ ならば

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} k-1 \\ j \end{bmatrix}_q + q^{k-j} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q.$$

定理 *6.6*の証明の概略. $P(m,n) := \sum_{i\geq 0} p_i(m,n)q^i$ とおいて，

$$P(0,0)=1, \quad P(m,n)<0 \quad (m<0\text{または}n<0),$$
$$P(m,n)=P(m,n-1)+q^nP(m-1,n) \tag{6.2.1}$$

を示せば，$P(m,n)$ と $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$ は同じ初期条件と漸化式を満たすので等しい．
非自明なのは(6.2.1)で，それを示すには，両辺の q^i の係数を比較した

$$p_i(m,n)=p_i(m,n-1)+p_{i-n}(m-1,n) \tag{6.2.2}$$

を任意の $i\geq 0$ について示せばよい．$|\lambda|=i$ なる任意の $\lambda\in L(m,n)$ に対して，次の二通りのどちらか一方のみが成立する．

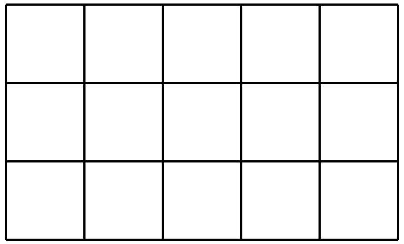
$$\text{(i) } \lambda_1<n, \qquad \text{(ii) } \lambda_1=n.$$

(i)の場合，任意の $j=1,2,\ldots$ に対して $\lambda_j\leq\lambda_1\leq n-1$ だから，λ は $L(m,n-1)$ に属し，かつ $|\lambda|=i$ となっている．そのような分割の個数は $p_i(m,n-1)$ である．
(ii)の場合，分割 $\mu:=(\lambda_2,\lambda_3,\ldots)$ は $L(m-1,n)$ に属し，かつ $|\mu|=i-\lambda_1=i-n$ である．逆にそのような $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots)\in L(m-1,n)$, $|\mu|=i-n$ から
$\lambda:=(n,\mu_1,\mu_2,\ldots)$ を作れば，この λ は(ii)を満たす．以上の構成 $\lambda\mapsto\mu$ 及び $\mu\mapsto\lambda$ は互いに逆になっている．よって(ii)の分割 λ の個数は μ の個数 $p_{i-n}(m-1,n)$ と等しい．
従って(6.2.2)が成立する． □

6.3 Sperner性の証明

系 6.6. Young束$L(m,n)$は階数に関して対称的かつunimodalで，Sperner性を持つ半順序集合である．

前回，Boole代数の商半順序集合B_S/Gが階数に関して対称的かつunimodalで，更にSperner性を持つことを示した (定理 5.8)．そこで，Young束$L(m,n)$がBoole代数の商で書けることを示せば系 6.6が示せる．
まず$R=R_{m,n}$を$m\times n$個の正方形が並んだ長方形とする．集合としては単に$|R|=mn$個の元からなるものである．下図に$R_{3,5}$を示す．



また，$G=G_{m,n}$はRの置換群$\mathfrak{S}_R$の部分群であって，

$$R\text{の各行の正方形を任意に置換し，その後で行ごと置換する}$$

ものからなるとする．前半の置換は$n!^m$個あり，後半の置換は$m!$個あるので，$|G|=n!^m\cdot m!$である．

部分群$G \subset \mathfrak{S}_R$はRに作用するので，Rの全ての部分集合からなるBoole代数B_RにもGは作用する．その軌道は次のように記述される．

補題 6.8. $G_{m,n}$のB_Rへの作用における各軌道$\mathfrak{o}$にはYoung図形Dが一つだけ含まれる．つまり$D \subset R$であって，Rを$m \times n$の長方形としてみたときに，Dは左に詰まっていて，上からi行目にある正方形の個数をλ_iとすると$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m$.

後は次の定理を示せば系 6.6が従う．

定理 6.9. $R = R_{m,n}$として，商半順序集合$B_R/G_{m,n}$は$L(m,n)$と同型である．

証明の概略．補題 6.8より$B_R/G_{m,n}$の各元には一つだけYoung図形$D \subset R_{m,n}$が含まれるから，写像$\varphi\colon B_R/G_{m,n} \to L(m,n)$が得られる．これは全単射．よって順序を保つことを示せばよい．つまり，$\mathfrak{o}, \mathfrak{o}^*$を異なる$G_{m,n}$軌道とし，$D_\lambda := \varphi(\mathfrak{o})$，$D_{\lambda^*} := \varphi(\mathfrak{o}^*)$として，$L(m,n)$において$\lambda \leq \lambda^*$であることと，$D \subseteq D^*$となる$D \in \mathfrak{o}$と$D^* \in \mathfrak{o}^*$が存在することが同値であることを示す．
$\lambda \leq \lambda^*$であれば$D_\lambda \subseteq D_{\lambda^*}$なので，$D = D_\lambda$，$D^* = D_{\lambda^*}$とすればよい．逆に$D \subseteq D^*$となるものが存在すると仮定しよう．$D$の各行にある正方形の個数を大きい順に$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m$と書き，$D^*$についても同様に$\lambda_j^*$と書く．$D$の各行は$D^*$に含まれるから，各$j = 1, 2, \ldots, m$に対して，$D^*$には$\lambda_j$個以上の正方形を含む行が$j$以上ある．すると$D^*$の行にある正方形の個数であって$j$番目に大きい$\lambda_j^*$は$\lambda_j$以上，つまり$\lambda_j^* \geq \lambda_j$となる． □

レポート問題7 & 次回について

全般的な注意

- 講義ノートのp.46にレポート問題7があります.
  締切は6/11の13時です. NUCTで提出して下さい.
- スマートフォン等でスキャンしたレポートは, PDFに変換して頂けると助かります.
  変換方法はNUCT「リソース」の「スキャンファイルのPDF変換.pdf」参照.

次回について.

- 来週6/11は名大祭のため休講です.
- 次回は6/18 (金)です.
  一コマ目 (09:30–10:30) は§7 群作用がある場合の数え上げ その 1を説明します.
  二コマ目 (10:45–11:45) は今回説明した§6 後半の発表用問題について,
  希望者に解答を発表してもらいます.

一コマ目はここまでです.