2021/05/28

数学演習IX・X　柳田クラス
第6回　Chapter 5　Group Actions on Boolean Algebras
(Boole代数上の群作用 その2)

柳田 伸太郎

このスライドはNUCTの「リソース」においてあります.

Zoomに自分の苗字と名前の両方が表示されるようにして下さい.

5.4　商半順序集合 B_n/G の Sperner 性

階数 n の次数付き半順序集合 P は $p_i = |P_i|$ が i の函数として極大値を一か所で持つとき，つまり $0 \leq j \leq n$ が存在して

$$p_0 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_j \geq p_{j+1} \geq \ldots \geq p_n$$

が成立する時，階数に関して unimodal (rank-unimodal) と呼ばれる．
Boole 代数 B_n は $p_i = \binom{n}{i}$ なので階数に関して対称的かつ unimodal である．

定理 5.8. 任意の部分群 $G \subseteq \mathfrak{S}_n$ に対して，商半順序集合 B_n/G は階数 n の次数付き半順序集合であって，階数に関して対称的かつ unimodal であり，更に Sperner 性を持つ．

証明． $P := B_n/G$ と書く．前回の命題 5.5 より P は階数 n の次数付き半順序集合であって階数に関して対称的．unimodal 性と Sperner 性を示すのに，補題 4.5 の条件

- $\widehat{U}_i$ は単射
- 任意の $x \in P_i$ に対して，$\widehat{U}_i(x)$ は $x < y$ である $y \in P_{i+1}$ の線形結合 (上昇写像)

を満たす線形写像 $\widehat{U}_i : \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ を $i < n/2$ に対して作り，$i \geq n/2$ の場合は最初の条件を全射に置き換えた $\widehat{U}_i$ を作る．

$\mathbb{R}P_i$ 上の線形写像を定義するには基底の各元 $\mathfrak{o} \in P_i$ が写る先を指定すればよい．ここで $P_i = (B_n/G)_i = (B_n)_i/G$ より，線形空間の同型

$$\mathbb{R}P_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}(B_n)_i^G, \quad \mathfrak{o} \mapsto v_{\mathfrak{o}} = \sum_{x \in \mathfrak{o}} x$$

があることが分かる．一方，前回の補題 5.7 より，上昇写像 $U_i \colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i+1}$ を $\mathbb{R}(B_n)_i^G$ に制限すれば $\overline{U}_i := U_i|_{(B_n)_i^G} \colon \mathbb{R}(B_n)_i^G \to \mathbb{R}(B_n)_{i+1}^G$ が得られる．そこで上の同型と合成すれば，線形写像 $\widehat{U}_i \colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ が得られる:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}(B_n)_i \arrow[r, "U_i"] & \mathbb{R}(B_n)_{i+1} \\
\mathbb{R}(B_n)_i^G \arrow[u, hook] \arrow[r, "\overline{U}_i"] & \mathbb{R}(B_n)_{i+1}^G \arrow[u, hook] \\
\mathbb{R}P_i \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, dotted, "\widehat{U}_i"] & \mathbb{R}P_{i+1} \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

こうして得られた $\widehat{U}_i$ が上昇写像で，$i < n/2$ ならば単射であることが示せる．また $i \geq n/2$ なら下降写像 $\widehat{D}_i \colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i-1}$ を用いて $\widehat{U}_i$ が全射であることが示せる． $\square$

5.5　定理 5.8の応用

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して $M := \{1, 2, \ldots, m\}$ とし, M の異なる二元からなる部分集合達のなす集合を

$$X := \binom{M}{2}$$

と書く (§1.1参照). X の元は頂点集合を M とするグラフの辺と思える. すると X 上のBoole代数 B_X について, 元 $x \in B_X$ はそのような辺の集まり, つまり頂点集合を M とする単純グラフ思える (問題 1.2 参照).
X に作用する群として, $G \subseteq \mathfrak{S}_X$ を次のように定める. $X = \binom{M}{2}$ の元を $[i, j] \in X$ $(i, j \in M,\ i \neq j)$ と書く. また頂点集合 M の置換 $\pi \in \mathfrak{S}_M$ に対して, その M への作用を $\pi.i$ $(i \in M)$ と書く. この時, 各 $\pi \in \mathfrak{S}_M$ に対して

$$\widehat{\pi}.[i, j] := [\pi.i, \pi.j]$$

とすることで $\widehat{\pi} \in \mathfrak{S}_X$ が定まる. そこで集合として

$$G := \{\widehat{\pi} \in \mathfrak{S}_X \mid \pi \in \mathfrak{S}_M\}$$

と定めると, これには $\mathfrak{S}_M$ の積 $(\pi, \sigma) \mapsto \pi\sigma$ から群の構造が定まる. このように, 群 G は「頂点集合 M の置換から自然に定まる $X = \binom{M}{2}$ の置換」のなす群である.

ここで B_X/G を考えよう．まず G 軌道の意味を考えると，単純グラフ $x, y \in B_X$ が同じ G 軌道に属するのは，頂点を置き換えることで x から y が得られる時，つまりグラフとして同型である時に他ならない．
従って B_X/G の元は M を頂点集合とする単純グラフの同型類である．特に

$$|B_X/G| = \text{同型でない，} m \text{個の頂点の単純グラフの数，}$$
$$|(B_X/G)_i| = \text{同型でない，} m \text{個の頂点と} i \text{個の辺の単純グラフの数．}$$

また B_X/G において $x \leq y$ であるのは，x と y の頂点をそれぞれ適当にラベルづければ，x の辺が全て y になっている，つまり x が y の spanning subgraph (y の部分グラフであって頂点集合が y のそれと一致するもの) と同型である時に他ならない．図 5.5.1 に $m = 4$ の場合の B_X/G の Hasse 図と，各頂点に対応する単純グラフを示した．

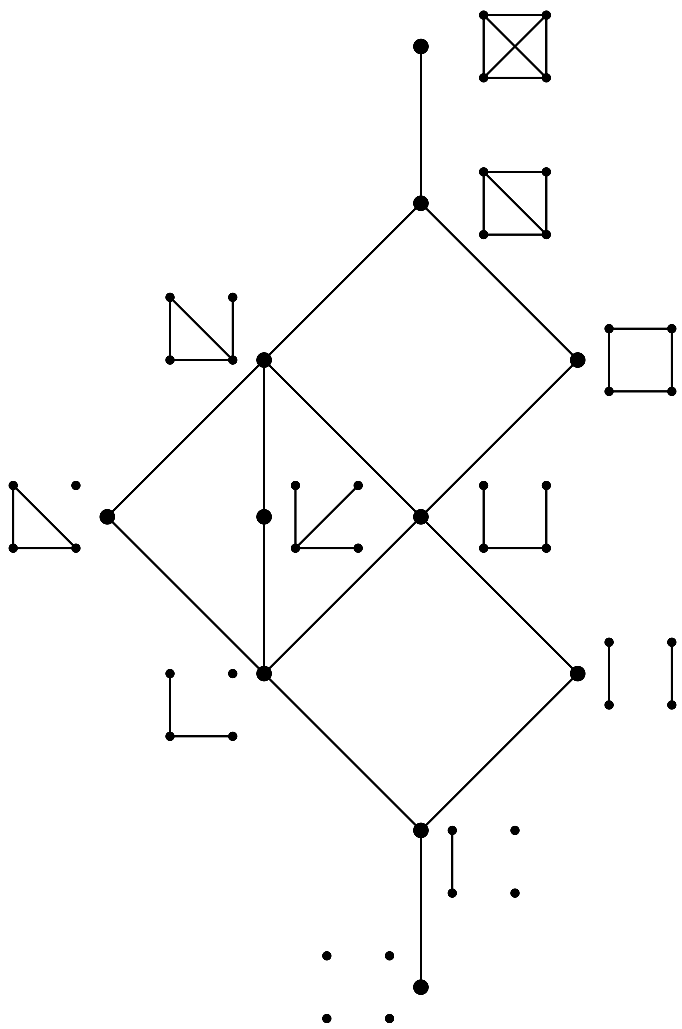

図5.5.1　$m = 4$の場合の単純グラフの分類を表すB_X/G

さて, 定理 5.8を上のB_X/Gに適用すると, 以下の主張が得られる.

定理 5.9. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $n := \binom{m}{2}$とする.

(1) m個の頂点とi個の辺を持つ単純グラフの同型類の数をp_iとすると, 数列 $p_0, p_1, \dots, p_n$は対称かつunimodal. つまり適当なjがあって,

$$p_i = p_{n-i} \quad (i = 0, 1, \cdots, n), \quad p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_j \geq p_{j+1} \geq \dots \geq p_n.$$

(2) Tをm頂点を持つ単純グラフの集合であって, どの元も他の元のspanning subgraphになっていないものとする. このようなTのうち$|T|$を最大にするものは, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$個の辺を持つ単純グラフで同型でないもの全てからなる.

5.6　実零点を持つ多項式

半順序集合の話題から離れて，ここでは実数列に関する話題を一つ取り上げる．ある実区間上定義された実函数 f は，区間内の任意の二点 x, y と任意の $0 < t < 1$ に対して

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

となる時，上に凸 (upward-convex) な函数，または凹函数 (concave function) という．

定義． $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ を実数の有限列とする．

(1) 数列 a が対数的に凹 (log-concave) であるとは，各 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ であることを言う．

(2) 数列 a が強く対数的に凹 (strictly log-concave) であるとは，$b_i := a_i/\binom{n}{i}$ とした時に，各 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $b_i^2 \geq b_{i-1}b_{i+1}$ であることを言う．

log-concave であることと unimodal であることは以下のように関係する．

命題 5.11． $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ は非負実数の有限列であって内部に 0 がない，つまり任意の $i < j < k$ について $a_i a_k \neq 0$ ならば $a_j \neq 0$ だとする．この時，更に a が log-concave ならば a は unimodal である．

証明．略 □

そこで log-concave である為の十分条件が欲しくなるが，次の古典的な結果がある．

定理 5.12 (Newton). 以下のn次の実数係数多項式の零点が全て実数だと仮定する.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^i.$$

この時, 数列$b = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$はstrongly log-concave, つまり数列$a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$はlog-concaveである. 更に全ての$0 \leq i \leq n$について$b_i \geq 0$ならば, 数列$b$は内部に$0$を持たない(命題 5.11参照). 特に数列$a$はunimodalである.

証明. まず$P(x)$の微分$P'(x)$の零点が全て実数であることが示せる (詳細略).
暫く$1 \leq i \leq n-1$なるiを固定する. 上の議論より$n-i+1$次の多項式$Q(x) := \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} P(x)$の零点は全て実. また$R(x) := x^{n-i+1} Q(1/x)$とすると, その零点は$Q(x)$の零点のうち$0$でないものの逆数と, 新たに付け加わる$0$で尽くされて, 結局全ての零点は実数である. 更に$S(x) := \frac{d^{n-i-1}}{dx^{n-i-1}} R(x)$とすると, その零点もまた全て実数である. ここで直接計算で次が示せる(レポート問題 6).

$$S(x) = \frac{n!}{2}(a_{i-1}x^2 + 2a_i x + a_{i+1}).$$

もし$a_{i-1} = 0$なら$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$は自明に成立する. $a_{i-1} \neq 0$なら$S(x)$は二次式で, 零点が全て実であることから判別式について

$$D/4 = a_i^2 - a_{i-1}a_{i+1} \geq 0.$$

これが任意の$1 \leq i \leq n-1$について成立するので，数列aはlog-concaveである．
後は，任意の$0 \leq i \leq n$について$a_i \geq 0$ならば，数列aは内部に0を持たないことを示せばよい．$a_j = 0$となるjが存在したとして，そのうち最小のものを取る．暫く$j \geq 1$と仮定しよう．このjについて上の議論を適用すると$S(x) = \frac{n!}{2}(a_{j-1}x^2 + a_{j+1})$．これと$S(x)$の零点が実であること及び$a_{j-1}, a_{j+1} \geq 0$から$a_{j+1} = 0$．もし$j+1 < k \leq n$かつ$a_k > 0$なる$k$が存在すれば，既に示したことから$a_j = a_{j+1} = \cdots = a_{k-1} = 0$．よって上の議論を$k-1$に適用すると$S(x) = \frac{n!}{2}a_k$．これは定数函数で零点を持たないので，上の議論と矛盾する．従って，$j \geq 1$の場合，任意の$i \geq j$に対して$a_i = 0$となる．$j = 0$の場合は$a_k > 0$となる最小のkを取って議論すると，任意の$i \geq k$に対して$a_i > 0$が言える．以上より数列aは内部に0を持たない． $\square$

レポート問題5 & 次回について

全般的な注意

- 講義ノートのp.40にレポート問題6があります.
  締切は6/04の13時です. NUCTで提出して下さい.
- スマートフォン等でスキャンしたレポートは, PDFに変換して頂けると助かります.
  変換方法はNUCT「リソース」の「スキャンファイルのPDF変換.pdf」参照.

次回について.

- 次回は6/04 (金)です.
  一コマ目 (09:30–10:30) は§6 Young図形とq二項定理を説明します.
  二コマ目 (10:45–11:45) は今回説明した§5 後半の発表用問題について,
  希望者に解答を発表してもらいます.

一コマ目はここまでです.