2021/05/21

# 数学演習IX・X 柳田クラス
# 第5回 Chapter 5 Group Actions on Boolean Algebras (Boole代数上の群作用 その1)

柳田 伸太郎

このスライドはNUCTの「リソース」においてあります.

Zoomに自分の苗字と名前の両方が表示されるようにして下さい.

## 5.1　集合上の群作用

**定義.** 群$G$の集合$X$上の**作用**とは，各$x \in X$と$\pi \in G$に対して$\pi(x) \in X$が定められていて，単位元$e \in G$と任意の$x \in X$に対して$e(x) = e$であり，また任意の$\pi, \sigma \in G$に対して次が成り立つもののことをいう．

$$\pi(\sigma(x)) = (\pi\sigma)(x). \tag{5.1.1}$$

集合$X$から自分自身への全単射全体がなす集合は写像の合成$\circ$でもって群$\mathfrak{S}_X$をなす．これを$X$の**置換群**と呼ぶ．単位元は恒等写像$\mathrm{id}_X$である．三つ組みとして書くと

$$\mathfrak{S}_X := (\{f\colon X \to X \mid \text{全単射}\}, \circ, \mathrm{id}_X).$$

群$G$の集合$X$上の**作用は群準同型**$\varphi\colon G \to \mathfrak{S}_X$**と一対一に対応**する (問題 5.2).

**例 5.1.** 群作用の例を四つ挙げる.

(a) $\mathbb{R}$を加法でもってAbel群とみなす．$xy$平面$\mathbb{R}^2$上の点を，座標原点を中心として角度$\alpha \in \mathbb{R}$で (反時計回りに) 回転させることで，加法群$\mathbb{R}$の$\mathbb{R}^2$上の作用が定まる:

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

対応する群準同型を$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{S}_{\mathbb{R}^2}$と書くと$\operatorname{Ker}\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$.

(b) 同じ群$\mathbb{R}$と集合$\mathbb{R}^2$について，(a)とは別の作用を考えよう．$\mathbb{R}^2$の点を$x$軸方向に$\alpha \in \mathbb{R}$平行移動させることで，加法群$\mathbb{R}$の$\mathbb{R}^2$上の作用が定まる．式で書くと

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+\alpha \\ y \end{bmatrix}.$$

この作用は忠実である．つまり対応する群準同型の核は自明群$\{0\} \subset \mathbb{R}$.

(c) 巡回群の直積$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$が集合$X = \{a,b,c,d\}$上に

$$\begin{aligned} &(0,1)\cdot a = b, \quad (0,1)\cdot b = a, \quad (0,1)\cdot c = c, \quad (0,1)\cdot d = d, \\ &(1,0)\cdot a = b, \quad (1,0)\cdot b = a, \quad (1,0)\cdot c = d, \quad (1,0)\cdot d = c \end{aligned}$$

で作用する．この作用は忠実 (問題 5.3).

(d) 前項とは別に，$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の$X = \{a,b,c,d\}$上の忠実な作用が以下で一意に定まる (問題 5.4):

$$\begin{aligned} &(0,1)\cdot a = b, \quad (0,1)\cdot b = a, \quad (0,1)\cdot c = d, \quad (0,1)\cdot d = c, \\ &(1,0)\cdot a = c, \quad (1,0)\cdot b = d, \quad (1,0)\cdot c = a, \quad (1,0)\cdot d = b. \end{aligned}$$

**定義.** 集合 $X$ に群 $G$ が作用しているとする.

(1) $x, y \in X$ に対し $\pi \in G$ があって $\pi(x) = y$ となる時に $x \sim y$ とすることで $X$ 上の同値関係 $\sim$ が定まる (問題 5.5). $x \sim y$ の時に $x$ と $y$ は $G$ 同値 ($G$-equivalent) だという.

(2) $x \in X$ に対し次の部分集合 $Gx \subset X$ を $x$ の $G$ 軌道 ($G$-orbit) という.

$$Gx := \{\pi(x) \mid \pi \in G\}.$$

群作用の記号に合わせて, $G \cdot x$ や $G.x$ といった記号も用いられる.

(3) $G$ 軌道全体のなす集合を $X/G$ と書き, $G$ の作用による $X$ の商 (quotient) と呼ぶ.

**発表用問題 5.5.** $G$ 同値 $\sim$ が $X$ 上の同値関係を定めることを示せ.

**発表用問題 5.6.** $x, y \in X$ に対し, $x \sim y \iff Gx = Gy$.

**発表用問題 5.7.** $x \in X$ の $G$ 軌道 $Gx$ は, 同値関係としての $G$ 同値 $\sim$ による $x$ を含む同値類に他ならない.

**発表用問題 5.8.** $G$ 軌道全体の集合 $X/G$ を用いると, $G$ 同値 $\sim$ による $X$ の分割は

$$X = \bigsqcup_{Gx \in X/G} Gx.$$

**例 5.2.** 例 5.1に沿って軌道の例を説明しよう.

(1) 例 5.1 (a), $\alpha \in G = \mathbb{R}$, $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \in X = \mathbb{R}^2$として

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

軌道は原点$C_0 := \{(0,0)\}$と半径$r \in \mathbb{R}_{>0}$の円周$C_r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$.

$$\mathbb{R}^2/G = \{r \in \mathbb{R}_{>0}\} \cup \{0\} = \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}} C_r.$$

(2) 例 5.1 (b), $\alpha \in G = \mathbb{R}$, $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \in X = \mathbb{R}^2$として

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + \alpha \\ y \end{bmatrix}.$$

軌道は各$\eta \in \mathbb{R}$を$y$切片とする$x$軸と平行な直線$H_\eta := \{(x,\eta) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$$\mathbb{R}^2/G = \{\eta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{\eta \in \mathbb{R}} H_\eta.$$

**例 5.2. つづき.**

(3) 例 5.1 (c), $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ が $X = \{a,b,c,d\}$ 上に

$$(0,1)\cdot a = b, \quad (0,1)\cdot b = a, \quad (0,1)\cdot c = c, \quad (0,1)\cdot d = d,$$
$$(1,0)\cdot a = b, \quad (1,0)\cdot b = b, \quad (1,0)\cdot c = d, \quad (1,0)\cdot d = c$$

で作用している時, 軌道は $\{a,b\}$ と $\{c,d\}$ の二つ.

(4) 例 5.1 (d), $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ が $X = \{a,b,c,d\}$ 上に以下のように作用する.

$$(0,1)\cdot a = b, \quad (0,1)\cdot b = a, \quad (0,1)\cdot c = d, \quad (0,1)\cdot d = c,$$
$$(1,0)\cdot a = c, \quad (1,0)\cdot b = d, \quad (1,0)\cdot c = a, \quad (1,0)\cdot d = b.$$

軌道は $\{a,b,c,d\}$ の一つで, この群作用は次の定義の意味で推移的.

**定義.** 軌道が一つである群作用は**推移的**だと呼ばれる. 言い換えると, 任意の $x, y \in X$ に対し $\pi \in G$ が存在して $\pi(x) = y$ となる時, これを $X$ 上の推移的な群 $G$ の作用と呼ぶ.

## 5.2　半順序集上の群作用

集合 $X$ 上の群 $G$ の作用は群準同型 $G \to \mathfrak{S}_X$ と同値であった (問題 5.1).

**定義.** $P = (P, \leq)$ を半順序集合とする

(1) $P$ の自己同型とは半順序集合としての同型 $\varphi\colon P \to P$ のこと. つまり, $\varphi$ は全単射であって順序写像 ($x, y \in P$, $x \leq y$ ならば $\varphi(x) \leq \varphi(y)$) である.

(2) $P$ の自己同型全体のなす群 $\mathrm{Aut}(P)$ を $P$ の自己同型群と呼ぶ.

**定義.** 半順序集合 $P$ 上の群 $G$ の作用とは群準同型 $G \to \mathrm{Aut}(P)$ のこと.

**例.** 半順序集合 $P$ として階数 $n$ の Boole 代数 $B_n$ を考える. 集合としては $B_n = \{x \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}\}$ であり, 特に $|B_n| = 2^n$ であった. 任意の置換 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ と $x = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in B_n$ に対して

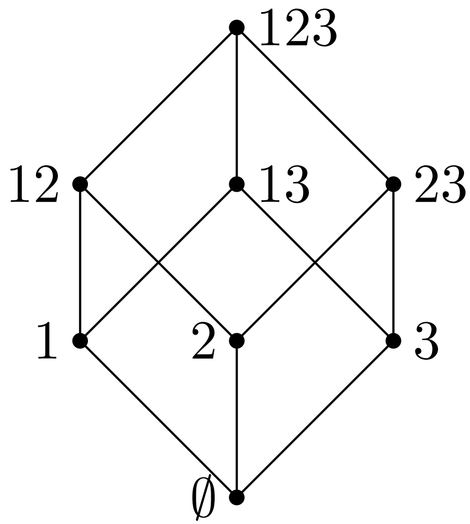
$$\pi(x) := \{\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_k)\} \subset \{1, \ldots, n\} \tag{5.2.1}$$

で写像 $\pi\colon B_n \to B_n$ を定めると, それは半順序集合 $B_n$ の自己同型 (問題 5.9). 更に対応

$$\mathfrak{S}_n \ni \pi \longmapsto (\pi\colon B_n \to B_n) \in \mathrm{Aut}(B_n) \tag{5.2.2}$$

は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $B_n$ 上の作用を定める (問題 5.10).

**例 5.3.** $n=3$とする．単位元$e$と隣接置換$(1,2)$からなる位数$2$の部分群$G\subset\mathfrak{S}_3$ がBoole代数$B_3=\{x\subseteq\{1,2,3\}=123\}$に作用する．$e$の作用は自明．$(1,2)$の作用では置換$1\leftrightarrow 2$が起きるが$3$は固定．この作用での軌道は以下の図中のようになる．




$$G123=\{123\}$$

$$G12=\{12\}\qquad G13=\{13,23\}$$

$$G1=\{1,2\}\qquad G3=\{3\}$$

$$G\emptyset=\{\emptyset\}$$

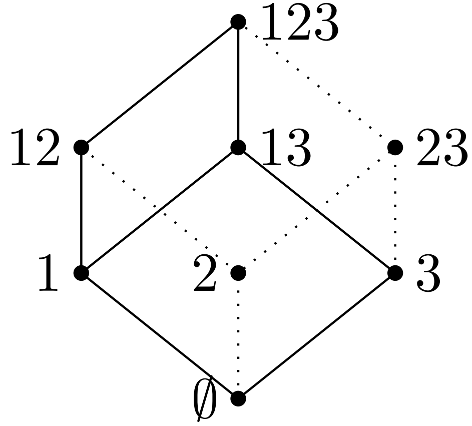
半順序集合$P$に有限群$G$が作用しているとしよう．半順序を忘れて$P$を集合と見なしても$G$の作用が定まっているので，商，つまり$G$軌道全体の集合$P/G$が定まる．この$P/G$に半順序が次のように定まる: $\mathfrak{o},\mathfrak{o}'\in P/G$を$G$軌道として，ある$x\in\mathfrak{o}$と$y\in\mathfrak{o}'$が存在して$P$の半順序について$x\leq y$となる時に$\mathfrak{o}\leq\mathfrak{o}'$と定める．

**発表用問題 5.11.** 上記の$P/G$上の$\leq$が半順序であることを確かめよ．

**定義.** 半順序集合$P/G=(P/G,\leq)$を商半順序集合 (quotient poset) と呼ぶ．

**例 5.4.** (5.2.2)で定めた対称群$\mathfrak{S}_n$のBoole代数$B_n$上の作用について.

(1) (例 5.3) $n=3$, $G=\{e,(1,2)\}\subset\mathfrak{S}_3$として, $B_3/G$のHasse図は



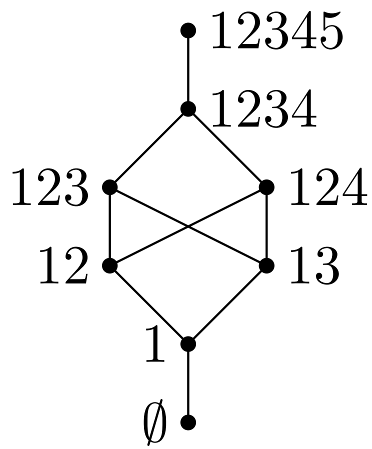

$G123=\{123\}$

$G12=\{12\}$ $\quad$ $G13=\{13,23\}$

$G1=\{1,2\}$ $\quad$ $G3=\{3\}$

$G\emptyset=\{\emptyset\}$

(2) $n=5$とし, $G$は$(1,2,3,4,5)$が生成する位数$5$の$\mathfrak{S}_5$の部分群とする. 商半順序集合 $B_5/G$のHasse図は以下のようになる.



## 5.3 商半順序集合 $B_n/G$

引き続き対称群 $\mathfrak{S}_n$ の Boole 代数 $B_n$ 上の作用を考える．前回導入した次数付き半順序集合に関する用語を用いる．

**命題 5.5.** 部分群 $G \subseteq \mathfrak{S}_n$ による商半順序集合 $B_n/G$ は階数 $n$ の次数付きであり，更に階数に関して対称的 (rank-symmetric)，つまり $i$ 番目のレベルの濃度 $p_i := |(B_n/G)_i|$ について次が成立する:

$$p_i = p_{n-i} \quad (\forall\, i = 0, 1, \ldots, n).$$

*証明.* 略. □

更に $B_n/G$ は Sperner 性を満たす (次回，定理 5.8)．今回の残りの部分で，その証明の準備をする．

$i = 0, 1, \ldots, n$ に対して $\mathbb{R}(B_n)_i$ でレベル $(B_n)_i$ を基底とする実線形空間を表す．各 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ に対して (同じ記号 $\pi$ を用いて) 線形変換 $\pi\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_i$ を

$$\pi\Bigl(\sum_{x \in (B_n)_i} c_x x\Bigr) := \sum_{x \in (B_n)_i} c_x \pi(x) \quad (c_x \in \mathbb{R}) \tag{5.3.1}$$

で定める．基底 $(B_n)_i$ を適当に並べて得られる $\pi$ の表現行列は置換行列 (問題 3.2) であることに注意しよう．

再び$G \subseteq \mathfrak{S}_n$を部分群とする．各$\pi \in G$が(5.3.1)によって$\mathbb{R}(B_n)_i$の線形変換を与えているが，それらで不変な元のなす部分空間$\mathbb{R}(B_n)_i^G$を考えよう:

$$\mathbb{R}(B_n)_i^G := \{v \in \mathbb{R}(B_n)_i \mid \pi(v) = v \ \forall \pi \in G\}.$$

**補題 5.6.** 群$G$のレベル$(B_n)_i$上の作用による$G$軌道$\mathfrak{o} \in (B_n)_i/G$に対して

$$v_{\mathfrak{o}} := \sum_{x \in \mathfrak{o}} x \in \mathbb{R}(B_n)_i \tag{5.3.2}$$

と定めると$v_{\mathfrak{o}} \in \mathbb{R}(B_n)_i^G$であり，更に$\{v_{\mathfrak{o}} \mid \mathfrak{o} \in (B_n)_i/G\}$は$\mathbb{R}(B_n)_i^G$の基底である．

*証明．* 略． □

最後に，前回導入した上昇写像$U_i : \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i+1}$を$\mathbb{R}(B_n)_i^G$に制限するとどうなるかを考えよう．定義を思い出すと，$x \in (B_n)_i$に対して

$$U_i(x) := \sum_{y \in (B_n)_{i+1},\, y > x} y. \tag{5.3.3}$$

**補題 5.7.** $v \in \mathbb{R}(B_n)_i^G$ならば$U_i(v) \in \mathbb{R}(B_n)_{i+1}^G$.

*証明．* 略． □

# レポート問題5 & 次回について

全般的な注意

- 講義ノートのp.34にレポート問題5があります.
  締切は5/28の13時です. NUCTで提出して下さい.
- スマートフォン等でスキャンしたレポートは, PDFに変換して頂けると助かります.
  変換方法はNUCT「リソース」の「スキャンファイルのPDF変換.pdf」参照.

次回について.

- 次回は5/28 (金)です.
  一コマ目 (09:30–10:30) は§5 Boole 代数上の群作用 その 2を説明します.
  二コマ目 (10:45–11:45) は今回説明した§5 前半の発表用問題について,
  希望者に解答を発表してもらいます.

一コマ目はここまでです.