2021/05/14

# 数学演習IX・X　柳田クラス
# 第4回　Chapter 4　The Sperner Property (Sperner性)

柳田 伸太郎

このスライドはNUCTの「リソース」においてあります.

Zoomに自分の苗字と名前の両方が表示されるようにして下さい.

## 4.1 半順序集合

**定義 4.1.** 半順序集合とは, 集合 $P$ とその上の二項関係 $\leq$ で以下の公理を満たすものの組 $(P, \leq)$ のことである.

(反射則)　任意の $x \in P$ に対して $x \leq x$.

(反対称則) 任意の $x, y \in P$ に対し, $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$.

(推移則)　任意の $x, y, z \in P$ に対し, $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$.

半順序集合 $(P, \leq)$ の元 $x, y \in P$ に対し, $x \leq y$ かつ $x \neq y$ の時, $x < y$ と書く. また集合 $P$ が有限集合の時, $(P, \leq)$ を有限半順序集合と呼ぶ.

半順序集合 $(P, \leq)$ のことを単に $P$ と書くこともある. また半順序集合を英語のカタカナ読みでポセットと呼ぶこともある.

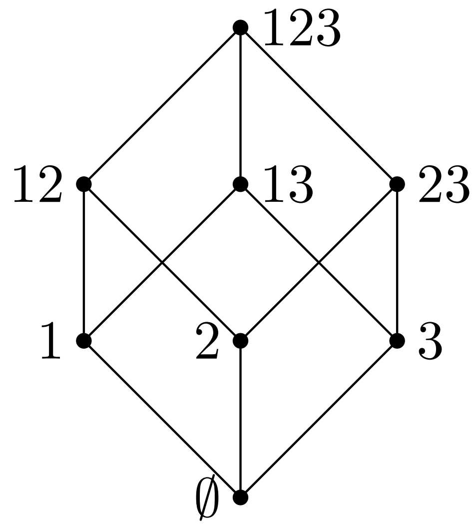
**例.** 集合 $S$ の部分集合全体のなす集合 $2^S$ と包含関係 $\subseteq$ の組 $B_S := (2^S, \subseteq)$ は半順序集合である. $B_S$ を $S$ の Boole 代数と呼ぶ. 特に $n \in \mathbb{N}$, $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ の場合は $B_n$ と書いて階数 $n$ の Boole 代数と呼ぶ.

有限半順序集合は有限グラフで表すことができる.

**定義.** 半順序集合 $P = (P, \leq)$ の二元 $x, y \in P$ について, $x < y$ かつ $x < z < y$ となる $z \in P$ が存在しない時, $y$ は $x$ を被覆する (cover) と言い, $x \lessdot y$ と書く.

**定義.** 有限半順序集合 $P = (P, \leq)$ に対し, 頂点集合を集合 $P$ とし, $x \lessdot y$ の時に $x$ と $y$ を接続する辺を一つ与えることでグラフができる. $x < y$ なら $y$ を $x$ より上に置いてこのグラフを描いたものを $P$ の Hasse図と呼ぶ.

**例.** Boole代数 $B_3$ の Hasse図は以下の図のようになる. 但し $\{1, 2, 3\}$ の部分集合を $1 := \{1\}$, $12 := \{1, 2\}$, $123 = \{1, 2, 3\}$ 等と略記している.



**定義.** $P=(P,\leq)$ を半順序集合とする.

(1) $P$ の全順序部分集合 $C$ のことを鎖ないしチェイン (chain) と呼ぶ. つまり, 鎖 $C$ の任意の二元 $x,y\in C$ に対して $x\leq y$ または $y\leq x$ が成立する.

(2) $P$ の鎖 $C$ が有限集合ならば有限鎖と呼ぶ. 有限鎖 $C$ の元の個数が $n+1$ の時に, $C$ は長さ $n$ であるという.

(3) $P$ の鎖 $C$ は, それを含む任意の鎖が $C$ に一致する時, 極大だという. 有限半順序集合は, その任意の極大鎖が長さ $n$ の時, 階数 $n$ の次数付き半順序集合 (graded poset of rank $n$) と呼ばれる.

(4) $P$ の鎖 $y_0<y_1<\cdots<y_j$ であって各 $y_{i+1}$ が $y_i$ を被覆しているもの, つまり $y_i\lessdot y_{i+1}$ となっているものを飽和鎖 (saturated chain) と呼ぶ.

(5) 階数 $n$ の次数付き半順序集合 $P$ の元 $x\in P$ について, $x$ を最大元とする飽和鎖のうち最長のものの長さが $j$ の時, $x$ は階数 $j$ であるといい, $\rho(x)=j$ と書く.

(6) 階数 $n$ の次数付き半順序集合 $P$ に対して, $P_j:=\{x\in P\mid\rho(x)=j\}$ を $P$ の $j$ 番目のレベルと呼ぶ. また $p_j:=|P_j|$ と書く. そして変数 $q$ の次の函数を $P$ の階数母函数 (rank-generating function) と呼ぶ.

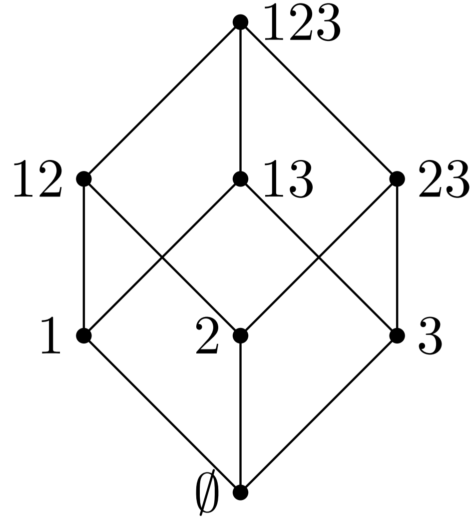
$$F(P,q):=\sum_{j=0}^{n}p_jq^j=\sum_{x\in P}q^{\rho(x)}.$$

**発表用問題 4.1.** 下図のBoole代数 $B_3$ について, 以下が成立することを説明せよ.

(1) $B_3$ は階数 $3$ の次数付き半順序集合である.

(2) レベルは $(B_3)_0 = \{\emptyset\}$, $(B_3)_1 = \{1, 2, 3\}$, $(B_3)_2 = \{12, 13, 23\}$, $(B_3)_3 = \{123\}$.

(3) $F(B_3, q) = 1 + 3q + 3q^2 + q^3 = (1+q)^3$.




**例.** 階数 $n$ のBoole代数 $B_n$ は階数 $n$ の次数付き半順序集合である. 各 $x \in B_n$ に対して $\rho(x) = |x|$ (部分集合 $x \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ の元の個数) であり, 階数母函数は

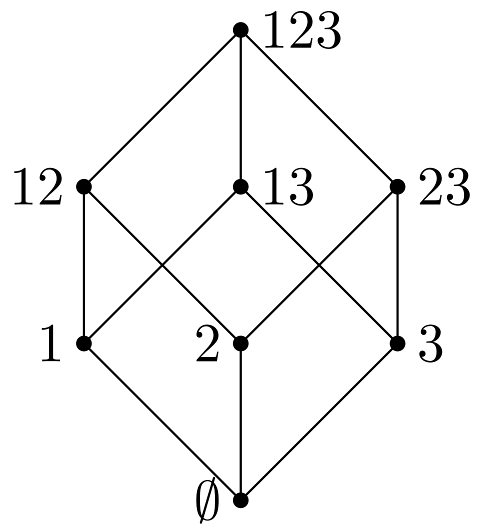
$$(B_n)_j = \{x \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \mid |x| = j\}, \quad p_j := |(B_n)_j| = \binom{n}{j},$$

$$F(B_n, q) = \sum_{j=0}^{n} p_j q^j = (1+q)^n.$$

## 4.2　Sperner性

**定義.** 半順序集合 $P = (P, \leq)$ の反鎖 (anti-chain) とは, 部分集合 $A \subsetneq P$ であってどの二元も $\leq$ で比較できない, つまり $x, y \in A$ かつ $x \neq y$ ならば $x < y$ でも $y < x$ でもないもののことをいう.

**発表用問題 4.2.** 次数付き半順序集合 $P$ について, 各レベル $P_j$ は反鎖であることを示せ.




**定義 4.2.** 階数 $n$ の次数付き半順序集合 $P$ は

$$\max\{|A| \mid A \subsetneq P \text{ は反鎖}\} = \max\{|P_j| \mid j = 0, 1, \ldots, n\} \tag{4.2.1}$$

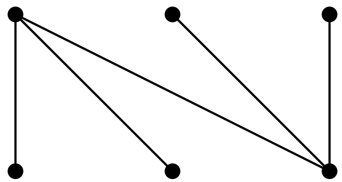
を満たす時, つまりレベル $P_i$ の最大濃度を反鎖の濃度が超えない時, $P$ が Sperner性を持つ, もしくは Sperner半順序集合だと言う.

今回の目標は

**系 4.8** (Spernerの定理). Boole代数 $B_n$ はSperner性を持つ.

Sperner性を持たない次数付き半順序集合も存在する. 例えば:

**例 4.3.** Hasse図が下図で与えられる次数付き半順序集合はSperner性を持たない (発表用問題 4.4).



次数付き半順序集合がSperner性を持つための, 組み合わせ論的な十分条件を紹介する.

**定義.** $P$ を次数付き半順序集合とし, 各レベルを $P_j$ で表す. 単射 $\mu\colon P_j \to P_{j+1}$ であって任意の $x \in P_j$ に対して $x < \mu(x)$ となるもののことを $P_j$ から $P_{j+1}$ への順序許容写像 (order-matching) と呼ぶ. 同様に, 単射 $\mu\colon P_j \to P_{j-1}$ であって任意の $x \in P_j$ に対して $\mu(x) < x$ となるもののことを $P_j$ から $P_{j-1}$ への順序許容写像と呼ぶ.

順序許容写像 $\mu\colon P_j \to P_{j+1}$ が存在すれば

$$p_j \le p_{j+1}$$

**命題 4.4.** $P$を階数$n$の次数付き半順序集合とする. 整数$0 \leq j \leq n$と順序許容写像の列

$$P_0 \xrightarrow{\mu_0} P_1 \xrightarrow{\mu_1} \cdots \xrightarrow{\mu_{j-2}} P_{j-1} \xrightarrow{\mu_{j-1}} P_j \xleftarrow{\mu_{j+1}} P_{j+1} \xleftarrow{\mu_{j+2}} \cdots \xleftarrow{\mu_{n-1}} P_{n-1} \xleftarrow{\mu_n} P_n$$

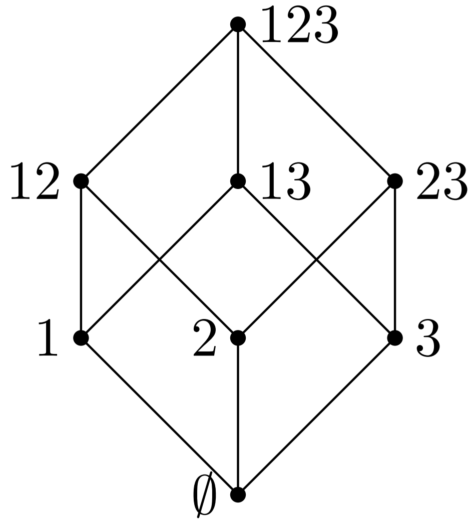
が存在すれば, $P$はSperner性を持ち, 更に次の不等式が成立する.

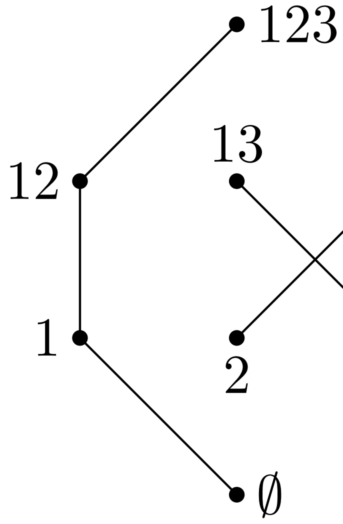
$$p_0 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_{j-1} \leq p_j \geq p_{j+1} \geq \cdots \geq p_{n-1} \geq p_n$$

**例.** Boole代数$P = B_3$について, 次のような順序許容写像の列が存在し, それに対して上の命題のグラフ$G$を描くと下図のようになる.

$$P_0 \xrightarrow{\mu_0} P_1 \xrightarrow{\mu_1} P_2 \xleftarrow{\mu_3} P_3,$$

$$\mu_0(\emptyset) = 1, \quad \mu_1(1) = 12,\ \mu_1(2) = 23,\ \mu_1(3) = 13, \quad \mu_3(123) = 13.$$



## 4.3 線形代数を用いたSpernerの定理の証明

命題 4.4により, 組み合わせ論的な条件からSperner性が保証される.
その組み合わせ論的条件は, 次の補題 4.5のような線形代数的な条件から従う.
集合$S$に対して$\mathbb{R}S$で$S$を基底とする実線形空間を表すことにする.

**補題 4.5.** $P$を次数付き半順序集合とし, 以下の二条件を満たす線形写像 $U\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$が存在すると仮定する.

- $U$は単射.
- 任意の$x \in P_i$に対して, $U(x)$は$x < y$である$y \in P_{i+1}$の線形結合である. (この時$U$を上昇写像 (order-raising operator) と呼ぶ.)

この時, 順序許容写像$\mu\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$が存在する.
同様に, 次の二条件を満たす線形写像$U\colon \mathbb{R}P_{i+1} \to \mathbb{R}P_i$があれば, 順序許容写像 $\mu\colon \mathbb{R}P_{i+1} \to \mathbb{R}P_i$が存在する.

- $U$は全射.
- $U$は上昇写像.

命題 4.4と補題 4.5をBoole代数$B_n$に適用したい. その為には線形写像 $U_i\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to (B_n)_{i+1}$ であって補題 4.5の条件を満たすものを見つければよい.

**定義.** $i = 0, 1, \dots, n-1$ に対して線形写像 $U_i \colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i+1}$ を次で与える.

$$U_i(x) := \sum_{y \in (B_n)_{i+1},\, y > x} y, \quad x \in (B_n)_i. \tag{4.3.1}$$

定義から $U_i$ は上昇写像である.

**定義.** $i = 1, 2, \dots, n$ に対して線形写像 $D_i \colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i-1}$ を次で与える.

$$D_i(y) := \sum_{x \in (B_n)_{i-1},\, x < y} x, \quad y \in (B_n)_i. \tag{4.3.2}$$

基底 $(B_n)_i$ 達をそれぞれ適当に番号付けして得られる表現行列を $[U_i]$ 及び $[D_i]$ と書けば

$$[D_i] = {}^t[U_{i-1}]. \tag{4.3.3}$$

**補題 4.6.** $i = 0, 1, \dots, n$ に対して, $I_i := \mathrm{id}_{\mathbb{R}(B_n)_i}$ と書くと

$$D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i = (n-2i)I_i. \tag{4.3.4}$$

但し $U_n := 0$, $D_0 := 0$ と定めた.

**定理 4.7.** 線形写像$U_i$は$i < n/2$なら単射であり, $i \geq n/2$なら全射である.

*証明.* (4.3.3)より$U_{i-1}D_i$の表現行列は

$$[U_{i-1}D_i] = [U_{i-1}][D_i] = {}^t[D_i][D_i].$$

一般に, 実行列$M$とその置換行列${}^tM$との積は半正定値 (positive semi-definite) であり, 固有値は全て非負である. 従って$U_{i-1}D_i$の固有値は全て非負. すると補題 4.6の関係式

$$D_{i+1}U_i = U_{i-1}D_i + (n-2i)I_i$$

から$D_{i+1}U_i$の固有値は$n-2i$以上である. そこで$i < n/2$を仮定すると, $D_{i+1}U_i$の固有値は全て正であり, $D_{i+1}U_i$が可逆なことが分かる. 特に$U_i$は単射である.
$i \geq n/2$の場合は, 半正定値性の議論から$D_{i+2}U_{i+1}$の固有値が全て非負で, 補題 4.6の

$$U_iD_{i+1} = D_{i+2}U_{i+1} + (2i+2-n)I_{i+1}$$

から$U_iD_{i+1}$の固有値は$2i+2-n$以上, つまり正であることが分かり, すると$U_iD_{i+1}$が可逆だから$U_i$は全射だと分かる. □

命題 4.4, 補題 4.5及び定理 4.7からSpernerの定理 (系 4.8) が従う.

# レポート問題4 & 次回について

全般的な注意

- 講義ノートのp.27にレポート問題4があります．
  締切は5/21の13時です．NUCTで提出して下さい．
- スマートフォン等でスキャンしたレポートは，PDFに変換して頂けると助かります．
  変換方法はNUCT「リソース」の「スキャンファイルのPDF変換.pdf」参照．

次回について．

- 次回は5/21 (金)です．
  一コマ目 (09:30–10:30) は§5 Boole 代数上の群作用 その 1を説明します．
  二コマ目 (10:45–11:45) は今回説明した§4 の発表用問題について，
  希望者に解答を発表してもらいます．

一コマ目はここまでです．