2021/04/30

数学演習IX・X 柳田クラス
第2回 Chapter 2 Cubes and the Radon Transform (立方体グラフとRadon変換)

柳田 伸太郎

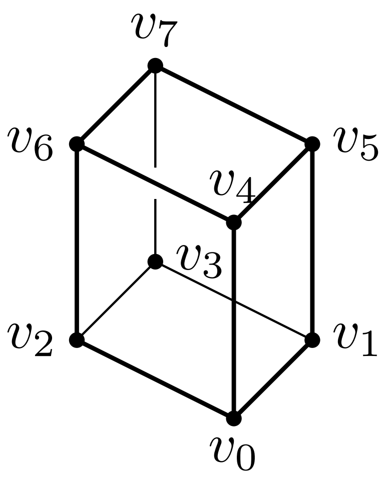
このスライドはNUCTの「リソース」においてあります.

Zoomに自分の苗字と名前の両方が表示されるようにして下さい.

2.1 立方体グラフ

位数 2 の巡回群を $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ と書き，n 個の直積 $\mathbb{Z}_2^n$ の元を $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_2^n$，$a_i \in \mathbb{Z}_2$ と書く．各 a_i を a の成分と呼ぶ．

定義． 立方体グラフ (n-cube) C_n とは，頂点集合が $\mathbb{Z}_2^n$ であり，二元 $u, v \in \mathbb{Z}_2^n$ の成分が一つだけ違うときに限り u と v を接続する辺があるグラフのことをいう．



$$
\begin{aligned}
v_0 &= (0,0,0) & \quad v_4 &= (1,0,0)\\
v_1 &= (0,0,1) & \quad v_5 &= (1,0,1)\\
v_2 &= (0,1,0) & \quad v_6 &= (1,1,0)\\
v_3 &= (0,1,1) & \quad v_7 &= (1,1,1)
\end{aligned}
$$

発表用問題 2.1． 立方体グラフ C_n に関する次の主張を示せ：頂点集合 $\mathbb{Z}_2^n$ を直積群とみなすと，$u, v \in \mathbb{Z}_2^n$ を接続する辺が存在するのは，$u + v$ の成分に $1 \in \mathbb{Z}_2$ が一つのみ存在するときである．

この節の目標は C_n の固有値と固有ベクトルを求めることである．但し隣接行列を使うのではなく，有限群 $\mathbb{Z}_2^n$ 上の函数空間を考えて求める．

2.2 有限群 $\mathbb{Z}_2^n$ 上の函数空間

定義. $\mathbb{Z}_2^n$ の実数値函数のなす集合を $\mathcal{V}$ と書く．つまり $\mathcal{V} := \{f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}\}$.

発表用問題 2.2. $\mathcal{V}$ が次元 2^n の実線形空間であることを示せ.

$\mathcal{V}$ の二種類の基底 B_1, B_2 を導入しよう．B_1 の方が簡単である.

定義. 各 $u \in \mathbb{Z}_2^n$ に対し $f_u \in \mathcal{V}$ を, Kronecker デルタを用いて

$$f_u(v) := \delta_{u,v} \quad (v \in \mathbb{Z}_2^n)$$

と定め, $B_1 := \{f_u \mid u \in \mathbb{Z}_2^n\}$ とする.

発表用問題 2.3. 任意の $g \in \mathcal{V}$ が

$$g = \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} g(u) f_u \tag{2.2.1}$$

と書けることを示し, それを使って集合 B_1 が実線形空間 $\mathcal{V}$ の基底であることを示せ.

発表用問題 2.4. 次の $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が実線形空間 $\mathcal{V}$ 上の内積であることを示せ.

$$\langle f,g\rangle := \sum_{u\in\mathbb{Z}_2^n} f(u)g(u) \quad (f,g\in\mathcal{V}).$$

またこの内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ について B_1 が正規直交基底であることを示せ.

B_2 を導入するのに, $\mathbb{Z}_2^n$ 上の**ドット積** (dot product) を用いる:

$$u\cdot v := u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \quad (u,v\in\mathbb{Z}_2^n).$$

定義. 各 $u\in\mathbb{Z}_2^n$ に対し $\chi_u\in\mathcal{V}$ を

$$\chi_u(v) := (-1)^{u\cdot v} \quad (v\in\mathbb{Z}^2)$$

と定め, $B_2 := \{\chi_u \mid u\in\mathbb{Z}_2^n\}$ とする.

補題 2.1. B_2 は実線形空間 $\mathcal{V}$ の基底である.

証明. $|B_2| = 2^n = \dim_{\mathbb{R}}\mathcal{V}$ なので B_2 が線形独立であることを示せば十分. そのためには内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して B_2 の元が互いに直交することを示せば十分. $u,v\in\mathbb{Z}_2^n$ に対して

$$\langle\chi_u,\chi_v\rangle = \sum_{w\in\mathbb{Z}_2^n}\chi_u(w)\chi_v(w) = \sum_{w\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{u\cdot w}(-1)^{v\cdot w} = \sum_{w\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{(u+v)\cdot w}.$$

ここで任意の $y \in \mathbb{Z}_2^n$ に対して

$$\sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{y \cdot w} = 2^n \delta_{y,\mathbf{0}} \tag{2.2.2}$$

となる (発表用問題 2.5). 但し $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_2^n$. すると

$$\langle \chi_u, \chi_v \rangle \neq 0 \iff u + v = \mathbf{0} \overset{(*)}{\iff} u = v. \tag{2.2.3}$$

但し $(*)$ では $u, v \in \mathbb{Z}_2^n$ であることを用いた. よって B_2 の元は互いに直交する. □

後のために, 基底 B_1 から B_2 への変換行列を T と書こう. つまり, その成分 $T_{u,v}$ は $\chi_v = \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} f_u T_{u,v}$ を満たす. χ_v の定義より $\chi_v = \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u \cdot v} f_u$ なので,

$$T_{u,v} = (-1)^{u \cdot v} \quad (u, v \in \mathbb{Z}_2^n). \tag{2.2.4}$$

実は, 補題 2.1の証明の議論を使うと, T の逆行列 T^{-1} は(発表用問題 2.6)

$$(T^{-1})_{u,v} = \frac{1}{2^n} (-1)^{u \cdot v} \quad (u, v \in \mathbb{Z}_2^n). \tag{2.2.5}$$

2.3 Radon 変換と立方体グラフの固有値

前副節で扱った $\mathbb{Z}_2^n$ 上の函数空間 $\mathcal{V}$ について，Radon 変換と呼ばれる函数変換 ($\mathcal{V}$ から自分自身への線形写像) を導入する．

定義． 頂点集合の部分集合 $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ と函数 $f \in \mathcal{V}$ に対し，新しい函数 $\Phi_\Gamma f \in \mathcal{V}$ を

$$\Phi_\Gamma f(v) := \sum_{w \in \Gamma} f(v+w) \quad (v \in \mathbb{Z}_2^n)$$

で定め，f の (離散ないし有限) Radon 変換 と呼ぶ．また対応 $f \mapsto \Phi_\Gamma f$ が定める線形写像 $\Phi_\Gamma : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ も Radon 変換と呼ぶ (発表用問題 2.7).

定理 2.2. 任意の $\Gamma \subset \mathbb{Z}_2^n$ と各 $u \in \mathbb{Z}_2^n$ に対して，函数 $\chi_u \in B_2 \subset \mathcal{V}$ は Radon 変換 Φ_Γ の固有ベクトルであり，対応する固有値 λ_u は

$$\lambda_u = \sum_{w \in \Gamma} (-1)^{u \cdot w}.$$

証明. $v \in \mathbb{Z}_2^n$ に対して

$$\Phi_\Gamma \chi_u(v) = \sum_{w \in \Gamma} \chi_u(v+w) = \sum_{w \in \Gamma} (-1)^{u \cdot (v+w)} = (-1)^{u \cdot v} \sum_{w \in \Gamma} (-1)^{u \cdot w} = \lambda_u \chi_u(v).$$

□

Radon変換と立方体グラフC_nを結びつけることでC_nの固有値を求めよう.

定義. 各$i = 1, 2, \ldots, n$に対して$\delta_i := (0, \ldots, 0, \overset{i\text{番目}}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_2^n$とし, $\Delta := \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\} \subset \mathbb{Z}_2^n$と定める. そして$\mathcal{V}$の基底$B_1 = \{f_u \mid u \in \mathbb{Z}_2^n\}$に関するRadon変換$\Phi_\Delta : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$の表現行列を$[\Phi_\Delta]$と書く. つまり, 行列$[\Phi_\Delta]$の$(u, v)$成分を$(\Phi_\Delta)_{u,v}$と書くと$\Phi_\Delta f_u = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} (\Phi_\Delta)_{u,v} f_v$.

補題 2.3. 表現行列$[\Phi_\Delta]$はC_nの隣接行列$\boldsymbol{A}(C_n)$と等しい.

証明. 各$u \in \mathbb{Z}_2^n$に対して$f_u \in B_1 \subset \mathcal{V}$の像$\Phi_\Delta f_u$を$B_1$で展開しよう. $v \in \mathbb{Z}_2^n$に対し

$$\Phi_\Delta f_u(v) = \sum_{w \in \Delta} f_u(v + w) \overset{(\star)}{=} \sum_{w \in \Delta} f_{u+w}(v).$$

但し$(\star)$は, $\mathbb{Z}_2^n$において$u = v + w \iff u + w = v$となることから従う. これは$\Phi_\Delta f = \sum_{w \in \Delta} f_{u+w}$を意味するから, 表現行列$[\Phi_\Delta]$の成分は

$$(\Phi_\Delta)_{u,v} = \begin{cases} 1 & (u + v \in \Delta) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

Δの定義から, $u + v \in \Delta \iff u$とvの成分が一箇所だけ違うことが必要十分. 問題2.1よりこれはuとvを接続する辺が存在することと同値なので, 主張が得られる. $\square$

系 2.4. 隣接行列 $\boldsymbol{A}(C_n)$ の固有ベクトル E_u は，頂点集合 $\mathbb{Z}_2^n$ の線形結合で表すと $E_u = \sum_{v\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{u\cdot v}v$．対応する固有値 λ_u は，$u\in\mathbb{Z}_2^n$ の成分 1 の数を $\omega(u)$ で表すと

$$\lambda_u = n - 2\omega(u).$$

証明．(2.2.1) から任意の $g\in\mathcal{V}$ は $g=\sum_{v\in\mathbb{Z}_2^n} g(v)f_v$ と書ける．特に $g=\chi_u$ とすると

$$\chi_u = \sum_{v\in\mathbb{Z}_2^n}\chi_u(v)f_v = \sum_{v\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{u\cdot v}f_v. \tag{2.3.1}$$

定理 2.2 より χ_u は Φ_Δ の固有ベクトルであり，また補題 2.3 より $B_1=\{f_u\mid u\in\mathbb{Z}_2^n\}$ に関する表現行列 $[\Phi_\Delta]$ は $\boldsymbol{A}(C_n)$ と等しいので，(2.3.1) は $E_u=\sum_{v\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{u\cdot v}v$ が $\boldsymbol{A}(C_n)$ の固有ベクトルであることを示している．
後半について．定理 2.2 より

$$\lambda_u = \sum_{w\in\Delta}(-1)^{u\cdot w} \tag{2.3.2}$$

が E_u の固有値である．ここで各 $\delta_i\in\Delta$ について，$u\in\mathbb{Z}_2^n$ の i 番目の成分 u_i を使って $\delta_i\cdot u=\delta_{u_i,1}$ となることに注意しよう．すると (2.3.2) の和において $\omega(u)$ 個の項は -1，$n-\omega(u)$ 個の項は $+1$ となるので，$\lambda_u=-\omega(u)+(n-\omega(u))=n-2\omega(u)$ となる． □

隣接行列 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(C_n)$ の固有値が分かったので，C_n 上の歩行の数え上げができる．

系 2.5. 頂点 $u, v \in \mathbb{Z}_2^n$ は $\omega(u+v) = k$ を満たすものとする（つまり一致しない成分が丁度 k 個）．この時 u から v への長さ ℓ の歩行の数は

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{u,v} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} (n-2i)^\ell \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n-k}{i-j}. \tag{2.3.3}$$

証明. 補題 2.3 より $B_1 = \{f_u \mid u \in \mathbb{Z}_2^n\}$ に関する $\Phi_\triangle^\ell : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ の表現行列の成分 $(\Phi_\triangle^\ell)_{u,v}$ を求めればよい．問題 2.4 より B_2 の各元 $\chi_u = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u \cdot v} f_u$ が $\Phi_\triangle$ の固有ベクトルで，対応する固有値は系 2.4 より $\lambda_u = n - 2\omega(u)$．このことは，$B_1$ から B_2 への変換行列 T を用いると

$$(T[\Phi_\triangle]T^{-1})_{u,v} = \delta_{u,v}\lambda_u$$

となることを意味する．従って，対角成分が $D_{u,u} = \lambda_u$ である正方行列 D を用いると，求めたいものは

$$(\Phi_\triangle^\ell)_{u,v} = (T^{-1}D^\ell T)_{u,v} = \sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} (T^{-1})_{u,w} \lambda_w^\ell T_{w,v}.$$

(2.2.4)と(2.2.5)から$T_{u,v} = (-1)^{u\cdot v}$及び$(T^{-1})_{u,v} = (-1)^{u\cdot v}/2^n$となるので,

$$(\Phi_\Delta^\ell)_{u,v} = \sum_{w\in\mathbb{Z}_2^n} \frac{(-1)^{u\cdot w}}{2^n}\lambda_w^\ell(-1)^{w\cdot v} = \frac{1}{2^n}\sum_{w\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{(u+v)\cdot w}\big(n-2\omega(w)\big)^\ell.$$

ここで$w\in\mathbb{Z}_2^n$のうち, $\omega(w)=i$かつ$|\{a=1,2,\ldots,n \mid (u+v)_a = w_a = 1\}| = j$となるものを考える. そのような$w$の個数を$N(i,j)$と書こう. すると$(u+v)\cdot w \equiv j \pmod 2$だから

$$(\Phi_\Delta^\ell)_{u,v} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^n (n-2i)^\ell \sum_{j=0}^n (-1)^j N(i,j).$$

ここで仮定$\omega(u+v)=k$を思い出すと, jの最大値はkである. そして$N(i,j)$は, wの成分1をi箇所指定する方法であって, $u+v$の成分1がある計k箇所からj個, 残りの$n-k$箇所から$i-j$箇所を選ぶものの数だから, $N(i,j) = \binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}$. 従って

$$(\Phi_\Delta^\ell)_{u,v} = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^n (n-2i)^\ell \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}.$$

$\square$

レポート問題2 & 次回について

全般的な注意

- 講義ノートのp.12にレポート問題2があります.
  締切は5/07の13時です. NUCTで提出して下さい.
- スマートフォン等でスキャンしたレポートは, PDFに変換して頂けると助かります.
  変換方法はNUCT「リソース」の「スキャンファイルのPDF変換.pdf」参照.

次回について.

- 次回は5/07 (金)です.
  一コマ目 (09:30–10:30) は講義ノート§3 ランダムウォークを説明します.
  二コマ目 (10:45–11:45) は今回説明した§2 の発表用問題について,
  希望者に解答を発表してもらいます.
  発表の仕方は, 解答をzoomで画面共有する, ないしチャットボックスからファイルをアップロードしてもらって, 説明してもらいます.

一コマ目はここまでです.