2021/04/23

数学演習IX・X　柳田クラス
第1回　ガイダンス・グラフ上の歩行

柳田 伸太郎

このスライドはNUCTの「リソース」においてあります.

0　はじめに

数学演習IX・Xの目標・内容

大まかには4年生の卒業研究 (セミナー) への準備を目的としています.
数学のテキストを正しく読解すること, 発表能力を身に着けることが目標です.

柳田クラスのテキスト・進め方

このクラスでは次の英語のテキストを扱います.
R. P. Stanley,
Algebraic Combinatorics: Walks, Trees, Tableaux and More,
Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2018.
1コマ目 (9:30-10:30) は, テキストの本文に沿って柳田が解説していきます.
2コマ目 (10:45-11:45) は, 講義ノートの「発表用問題」について, 希望者に解答を発表してもらいます.

単位・成績

一回発表すれば単位を出します.
成績は発表とレポートの出来具合から総合的に判断して評価します.

今後の予定

4/23日現在での講義・演習の内容と予定は以下の通りです.

日付	1コマ目 (講義)	2コマ目 (演習)
4/23	グラフ上の歩行	休講
4/30	立方体グラフとRadon変換	グラフ上の歩行
5/07	グラフ上のランダムウォーク	立方体グラフとRadon変換
5/14	Sperner性	グラフ上のランダムウォーク
5/21	$\cdots$	Sperner性
$\vdots$		
6/25	休講	休講

また毎週, 簡単なレポート問題を出題します.
問題は講義ノートに載っています.

1　グラフ上の歩行

今回はテキストの　Chapter 1　Walks in Graphs　を扱います.
節番号は講義ノートのものと一致します.
また定理番号はテキスト及び講義ノートのものと一致します.

1.1　有限グラフに関する基本概念・用語

集合 S に対して, 積集合 $S \times S$ の元の順番を無視してできる集合を $\left(\!\binom{V}{2}\!\right)$ と書く.
例えば $S = \{1, 2, 3\}$ に対して

$$\left(\!\!\binom{S}{2}\!\!\right) = \{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,2\},\{2,3\},\{3,3\}\} = \{11, 12, 13, 22, 23, 33\}.$$

グラフ (graph) とは, 大雑把には頂点 (vertex) とそれらを結ぶ辺 (edge) からなるもののこと. 数学的な定義を述べると:

定義. グラフとは頂点集合 V と辺集合 E 及び各辺 $e \in E$ に端点を対応させる写像 $\varphi \colon E \to \left(\!\binom{V}{2}\!\right)$, $e \mapsto \varphi(e) = \{u, v\}$ からなる三つ組み (V, E, φ) のことを言う.
頂点集合 V と辺集合 E が共に有限集合であるグラフを有限グラフと呼ぶ.

1.2 グラフの隣接行列と歩行

以下, 有限グラフのことを単にグラフと呼ぶ.
G と書いたらグラフ $G=(V,E,\varphi)$ のことを指すものとし, $p:=|V|$ を頂点の数とする.

定義. グラフ G の頂点集合 V に番号付け $\{1,\ldots,p\}$ を一つ指定し, p 次正方行列 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(G)$ を

$$\boldsymbol{A}=[a_{i,j}]_{i,j=1}^{p}, \quad a_{i,j}:=|\{\varphi\in E \mid \varphi(e)=ij\}|$$

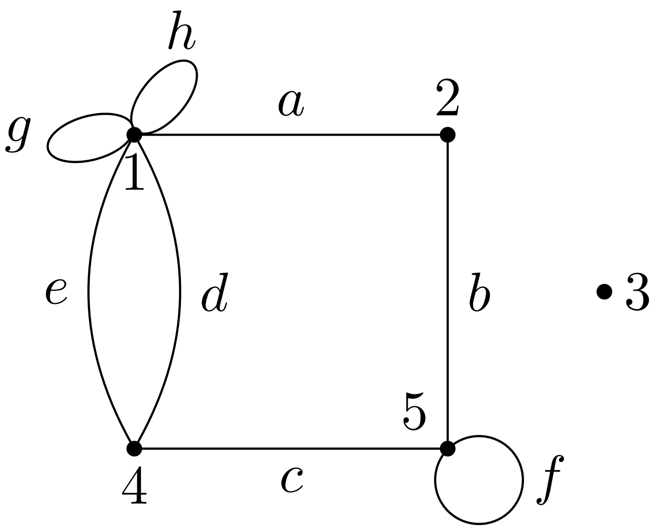
で定める. つまり (i,j) 成分 $a_{i,j}$ を頂点 i と j に接続する辺の数で定める.
この正方行列 $\boldsymbol{A}$ を G の隣接行列 (adjacency matrix) と呼ぶ.

定義からグラフ G の隣接行列 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(G)$ は実対称行列である.
また $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$ は G のループ (loop), つまりある頂点とそれ自身を結ぶ辺, の総数である.

例. 図 1.1 は有限グラフ $G = (V_0, E_0, \varphi_0)$ を表している. 但し

$$V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E_0 = \{a, b, c, d, e, f, g\},$$
$$\varphi_0(a) = 12,\ \varphi_0(b) = 25,\ \varphi_0(c) = 45,$$
$$\varphi_0(e) = \varphi_0(f) = 14,\ \varphi_0(f) = 55,\ \varphi_0(g) = \varphi_0(h) = 11.$$

辺 f, g, h がループで, 重複辺は e, d と g, h である.
隣接行列 $\boldsymbol{A}$ は図中のようになって, 確かに実対称行列である.
対角成分は対応する頂点に接続するループの数で, 特に $\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = 3$ はループの総数である.



$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

図1.1　有限グラフ G_0

さて，この節のタイトルであるグラフ上の歩行を導入しよう．

定義． グラフG上の長さℓの歩行またはウォーク (walk) とは，頂点$v_j \in V$ と辺$e_j \in E$からなる列$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_\ell, e_\ell, v_{\ell+1}$であって，任意の$1 \leq i \leq \ell$に対して$\varphi(e_i) = v_i v_{i+1}$となっているもののことをいう．また，これを$v_1$から$v_{\ell+1}$への歩行と呼び，$v_1$を始点，$v_{\ell+1}$を終点と呼ぶ．

要は，歩行とは端点を共有する辺を結んでできる道 (path) のことである．

定理 1.1. グラフGの頂点集合の番号付け$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$から定まる$G$の隣接行列を$A$と書く．この時，任意の正整数$\ell$に対し，$\boldsymbol{A}^\ell$の$(i,j)$成分は$v_i$から$v_j$への長さ$\ell$の歩行の数と等しい．

隣接行列 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(G)$ は実対称行列だから直交行列で対角化できる．つまり ${}^tUU = I_p$ となる $U = [u_{r,s}] \in \mathrm{Mat}(p, \mathbb{R})$ があって

$$U^{-1}\boldsymbol{A}U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$$

となる．λ_i 達は $\boldsymbol{A}$ の固有値である．

定義． λ_i 達をグラフ G の固有値 (eigenvalues) と呼ぶ．またそれに付随する $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルをグラフ G の固有ベクトル (eigenvectors) と呼ぶ．

$i, j, k \in \{1, \ldots, p\}$ に対して $c_k := u_{ik}u_{jk}$ としよう．

系 1.2. 各 $\ell \in \mathbb{N}$ に対して，$\boldsymbol{A}^\ell$ の (i, j) 成分は次で与えられる．

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{i,j} = c_1\lambda_1^\ell + \cdots + c_p\lambda_p^\ell. \tag{1.2}$$

発表用問題 1.3. 上記の (1.2) を示せ．

定理 1.1より, v_i から v_j への長さ ℓ の歩行の数は(1.2)の右辺で与えられる.
しかし, これを計算するには対角化に用いた行列 U を計算する必要がある.
一方で次の量は, U を求めなくても固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ さえ分かれば計算できる.

系 1.3. グラフ G の長さ ℓ の閉歩行 (closed walk), つまり始点と終点が一致する長さ ℓ の歩行の数は次で与えられる.

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^\ell) = \lambda_1^\ell + \cdots + \lambda_p^\ell.$$

発表用問題 1.4. 系 1.3を示せ.

例. 図 1.1のグラフ G_0 を考える. 隣接行列は

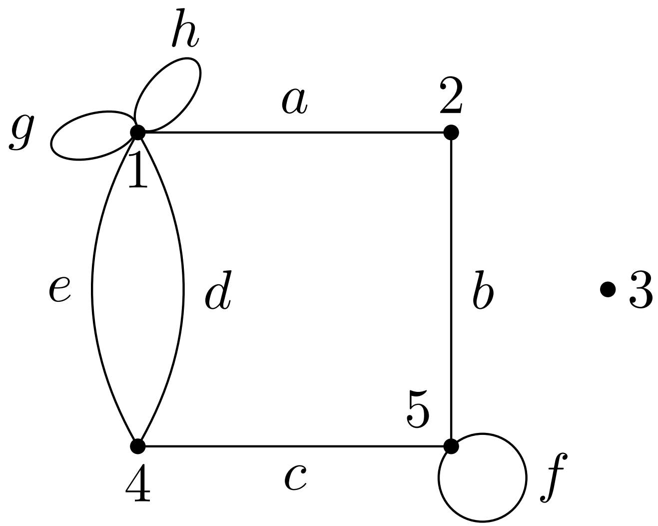
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 長さ $\ell = 1$ の閉歩行はループ f, g, h だけなので, その数は 3. 一方で隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を使うと $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = 3$.

(次頁に続く)

例. 引き続きグラフG_0を考える.

(2) 長さ$\ell = 2$の閉歩行の数は$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2) = 9+2+0+5+3 = 19$となるはず.



$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

グラフを使って数え上げてみよう.

始点が1のものは$\{g, h\}$の組み合わせと$\{e, d\}$の組み合わせ及びaaの4+4+1=9個.

始点が2のものはaaとbbの2個. 始点が3のものはなし.

始点が4のものは$\{e, d\}$の組み合わせとccの計$4+1=5$個.

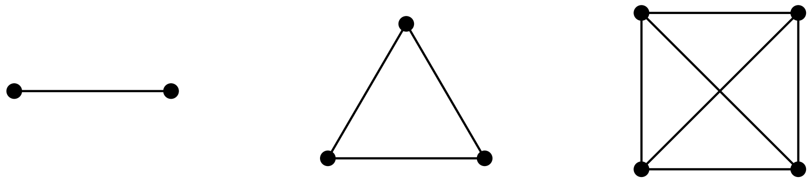
始点が5のものはbb, cc, ddの計3個.

従って, 確かに$9+2+0+5+3 = 19$個.

1.3　完全グラフ

次に特別な形のグラフを考えよう.

定義. 頂点集合 $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$ の**完全グラフ** (complete graph) K_p とは, 任意の異なる二頂点に接続する辺が一つだけ存在するグラフのことである.



K_2 　 K_3 　 K_4

完全グラフ K_p の隣接行列は, 全ての成分が 1 である p 次正方行列 J_p を用いて次のように書ける.

$$\boldsymbol{A}(K_p) = J_p - I_p \tag{1.3}$$

命題 (テキスト, 1.6 Corollary, (1.5)). 完全グラフK_pにおける, 始点v_iと終点v_jの長さℓの歩行の数は

$$\left(\boldsymbol{A}(K_p)^\ell\right)_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{(p-1)^\ell + (-1)^\ell (p-1)}{p} & (i = j) \\ \dfrac{(p-1)^\ell - (-1)^\ell}{p} & (i \neq j) \end{cases}.$$

証明. $I := I_p$, $J := J_p$ と書くと, (1.3) より $\left(\boldsymbol{A}(K_p)^\ell\right)_{i,j} = \left((J-I)^\ell\right)_{i,j}$.
従って$(J-I)^\ell$の(i,j)成分を求めればよい.
JとIは可換, つまり$JI = IJ$だから, 二項定理が使えて

$$(J-I)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{\ell-k} \binom{\ell}{k} J^k = (-1)^\ell I + \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{\ell-k} p^{k-1} \binom{\ell}{k} J.$$

但し最後で$J^k = p^k J$を用いた.

(次頁に続く)

再び二項定理より $\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{\ell-k}\binom{\ell}{k}p^{k-1} = \frac{1}{p}\big((p-1)^{\ell}-(-1)^{\ell}\big)$ だから,

$$(J-I)^{\ell} = (-1)^{\ell}I + \frac{(p-1)^{\ell}-(-1)^{\ell}}{p}J.$$

右辺の (i,j) 成分を見て, 結論を得る. $\square$

4 レポート問題1 & 次回について

全般的な注意

- 講義ノートのp.7にレポート問題1があります.
  締切は4/30の13時です. NUCTで提出して下さい.
- スマートフォン等でスキャンしたレポートは, PDFに変換して頂けると助かります.
  変換方法はNUCT「リソース」の「スキャンファイルのPDF変換.pdf」参照.

次回について.

- 次回は4/30 (金)です.
  一コマ目 (09:30–10:30) は講義ノート§2 立方体グラフとRadon変換を説明します.
  二コマ目 (10:45–11:45) は今回説明した§1 の発表用問題について,
  希望者に解答を発表してもらいます.
  発表の仕方は, 解答をzoomで画面共有する, ないしチャットボックスからファイルをアップロードしてもらって, 説明してもらいます.

今日はここまでです.