§9. Riemannの写像定理

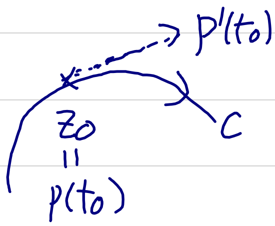
§9.1. 等角写像

定義. $C \subset \mathbb{C}$: 滑らかな曲線, $z_0 \in C$

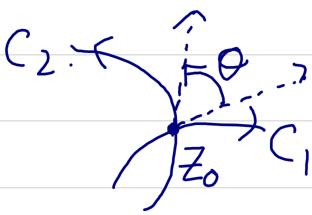
$p = x+iy : [a,b] \to \mathbb{C}$ パラメータ表示. $z_0 = p(t_0)$

Cのz_0でのpに関する接ベクトル: $p'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$

ないし $\begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix}$



定義. $C_1, C_2 \subset \mathbb{C}$: 滑らかな曲線, z_0で交わる.



C_1とC_2のz_0における角度

:= z_0での接ベクトルがなす角度

(C_1からC_2に向かって測る)

定義. 連続微分可能な複素関数$f(z)$が点z_0で等角又は共形

$:\Longleftrightarrow$ (i) z_0を含むある開集合上で単射

かつ (ii) z_0で交わる任意の滑らかな二曲線C_1とC_2に対し

(C_1とC_2のz_0における角度)

= ($f(C_1)$と$f(C_2)$の$f(z_0)$における角度)

§9.2. 正則関数と等角写像

定理9.2.1. $z_0 \in \mathbb{C}$を含む開集合上の複素関数fに対し

fはz_0で等角 $\Longleftrightarrow$ fはz_0で正則かつ$f'(z_0) \neq 0$. //

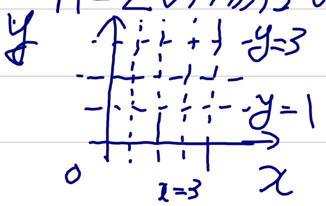
系9.2.2. 等角写像の合成は等角写像 //

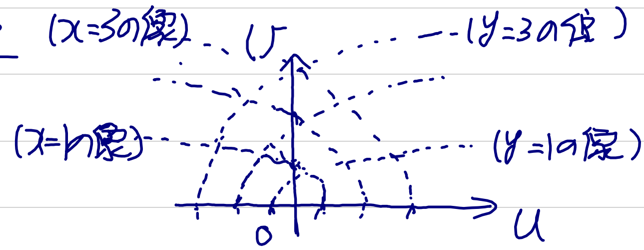
例1.9.2.3. 以下は全て等角写像

(2) $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg(z) < \pi/n\}$,

$f(z) := z^n$

$n=2$ の場合の様子





$z = x+iy \longmapsto z^2 = (x^2-y^2)+2ixy = u+iv$

$y = c$ 一定 $\rightsquigarrow$ $u = x^2-c^2,\ v = 2cx$

$\Longleftrightarrow$ $u = (v/2c)^2 - c^2$

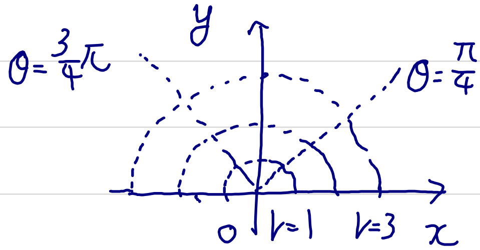
$x = c$ 一定 $\rightsquigarrow$ $u = c^2-y^2,\ v = 2cy$

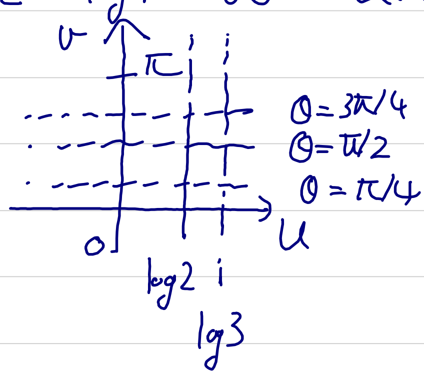
$\Longleftrightarrow$ $u = -(v/2c)^2 + c^2$

(4) $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$

$f(z) := \mathrm{Log}\, z$

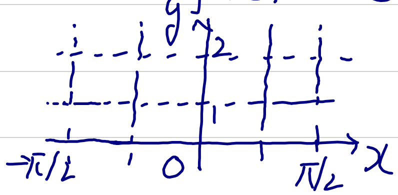
$z = re^{i\theta} \longmapsto \mathrm{Log}\, z = \log r + i\theta = u+iv$

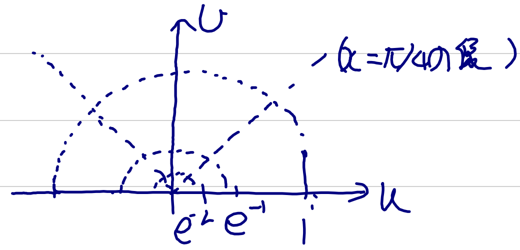




(6) $U := \{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid |x| < \pi/2,\ y > 0 \}$.

$f(z) = \exp(iz)$





$$z = x+iy \longmapsto e^{iz} = e^{-y}e^{ix} = u+iv$$

§9.3. 双正則写像

<u>定義.</u> $U, V \subset \mathbb{C}$: 開. $f: U \to V$. が双正則写像 :$\Longleftrightarrow$ 全単射かつ正則.
このような f が存在するとき, U と V は双正則であるという.

<u>補題</u> 双正則写像は定義域の全ての点で等角.

<u>命題9.3.1.</u> $\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0 \}$ と $\mathbb{D} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ は双正則.

∵ $F: \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ $\quad F(z) = \dfrac{i-z}{i+z}$ とその逆写像
$G: \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ $\quad G(z) = i\dfrac{1-z}{1+z}$ で双正則になる. //

<u>定義.</u> 開集合 $U \subset \mathbb{C}$ から U 自身への双正則写像を U の自己同型という.

<u>定理9.3.3.</u> 単位円板 $\mathbb{D}$ の自己同型は次の形のものに限る.

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z} \quad (\theta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{D})$$

∵ Schwarzの補題から従う.

§9.4. Riemannの写像定理

定理9.4.1. $\phi \neq \Omega \subsetneq \mathbb{C}$: 単連結領域

$\Rightarrow$ Ωは単位円板 $\mathbb{D}$と双正則.

より正確に、$\forall z_0 \in \Omega$, $\exists ! F : \Omega \to \mathbb{D}$ 双正則

$F(z_0) = 0$, $F'(z_0) \in \mathbb{R}_{>0}$.

$\neq \phi, \neq \mathbb{C}$

系 9.4.2. $\mathbb{C}$の真の単連結領域は全て双正則.

証明の方針

(1) $\exists g : \Omega \to \mathbb{D}$, 等角, $g(z_0) = 0$ をとって

$z_0 = 0 \in \Omega \subset \mathbb{D}$ の場合に帰着.

(2) Montelの定理9.4.3.を用いて、

$\mathcal{F} := \{ f : \Omega \to \mathbb{D} \mid$ 単射, 正則, $f(0) = 0 \}$

$s := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|$

について、$s < \infty$ かつ $\exists F \in \mathcal{F}$ $F'(0) = s$

となることを示す.

(3) $F : \Omega \to \mathbb{D}$, 双正則 であることを示す.

§10. Γ函数

§10.1. 積分表示と解析接続

定義 10.1.1. / 命題 10.1.2.

$z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > 0$ に対し

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$t^{z-1} := \exp((z-1)\log t)$

← 実数 t について の 広義積分

は正則函数を定める。Γ函数と呼ぶ。

補題 10.1.3. $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > 0$ $\quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

特に $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\Gamma(n+1) = n!\,\Gamma(1) = n!$

(:) 部分積分

定理 10.1.4. $\Gamma(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数に解析接続される。

極は $z = 0, -1, -2, \dots$ 全て1位。

留数は $\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

$(0! := 1)$

(:) ・ $\mathrm{Re}\, z > -1$ に対して

$$F_1(z) := \frac{1}{z}\Gamma(z+1)$$

とすれば、F_1 は $\mathrm{Re}\, z > -1$ で有理型,

$z=0$ で1位の極。$\mathrm{Res} = \Gamma(1) = 1$

更に $\mathrm{Re}\, z > 0$ で $F_1(z) = \Gamma(z)$

・ $\mathrm{Re}\, z > -m$ に対して

$$F_m(z) := \frac{1}{z} F_{m-1}(z) = \cdots = \Gamma(z+m) / (z(z+1)\cdots(z+m-1))$$

とすれば、F_m は有理型。$z = 0, -1, \dots, -(m-1)$ で1位の極。

$$\operatorname{Res}_{z=-n} F_m(z) = \Gamma(m-n) / ((-n)(-n-1)\cdots(-1)\cdot(m-n-1)!)$$

$(0 \le n \le m-1)$

$$= (-1)^n / n!$$

§10.2. 関数等式

定理10.2.1. $$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$$

∵ 両辺とも $z\in\mathbb{Z}$ に1位の極を持つ有理型函数。
$(0,1)\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ で等式示せば、解析接続の一意性より従う。
$(0,1)$ での証明は積分表示を用いる。(次頁) //

§10.3. 無限積表示

定理10.3.1. (Weierstrass) $$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{\gamma z}\cdot z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$$

但し $\gamma:=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}-\log N\right)$

$=0.577\ldots$ (Eulerの定数)

定理10.3.2. (Gauss) $$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\,n^{z}}$$

∵ 10.3.1. と 10.3.2 が同値であることを示す。
10.3.2. は実解析で示せる。 //

関数等式の証明: $0<z<1$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1}\,du \overset{u=vt\ (t>0)}{=} t\int_0^\infty e^{-vt} (vt)^{z-1}\,dv$$

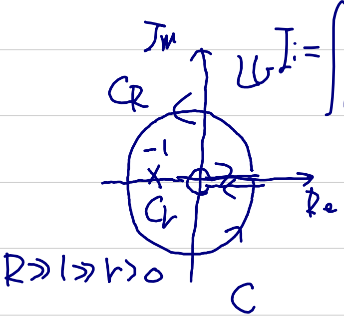
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-z}\,\Gamma(z)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} t^{-z}\cdot\left(t\int_0^\infty e^{-vt}(vt)^{z-1}\,dv\right)dt$$

$$= \cdots = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t(v+1)} v^{z-1}\,dt\,dv$$

$$= \int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v}\,dv$$

問7.1.8. $0<z<1$



$$I := \int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v}\,dv = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

$\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$ for $0<\theta<2\pi$

$$\int_C \frac{v^{z-1}}{1+v}\,dv = 2\pi i \operatorname*{Res}_{v=-1} \frac{v^{z-1}}{1+v} = 2\pi i\cdot e^{(z-1)\log(-1)}$$

$$= -2\pi i\, e^{z\pi i}$$

$$\int_C \frac{v^{z-1}}{1+v}\,dv = \int_{C_R} \frac{v^{z-1}}{1+v}\,dv + \int_{C_r} \frac{v^{z-1}}{1+v}\,dv$$

$$+ \int_r^R \frac{v^{z-1}}{1+v}\,dv + \int_R^r \frac{e^{2\pi i(z-1)} v^{z-1}}{1+v}\,dv$$

$$\left|\int_{C_R}\right| \le \frac{R^{z-1}}{R-1}\cdot 2\pi R \xrightarrow{R\to\infty} 0,\quad \left|\int_{C_r}\right| \le \frac{r^{z-1}}{1-r}\cdot 2\pi r \xrightarrow{r\to 0} 0$$

$$\int_r^R + \int_R^r = (1-e^{2\pi i z})\int_r^R \frac{v^{z-1}}{1+v} \xrightarrow[r\to 0]{R\to\infty} I\cdot(1-e^{2\pi i z})$$

$$\therefore I = -2\pi i\, e^{z\pi i}/(1-e^{2\pi i z})$$