2020 年度秋学期 現代数学基礎 CⅢ　追加レポート解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

問題 1. 複素関数 $f(z) = \overline{z}$ が正則か否か論じよ.

解答. Cauchy-Riemann 方程式, または微分の定義を調べると, $z = 0$ では正則, $z \neq 0$ では正則ではない.

問題 2. n を正の整数として, 次の複素積分の値を求めよ. 但し積分路 C は単位円 $|z| = 1$ の上半分に正の向きを入れたものとする.

$$\int_C (z + z^{-2})^n \, dz.$$

解答. 被積分函数 $f(z) := (z + z^{-2})^n$ は極 $z = 0$ を除いて正則. 留数定理から $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z)$. 二項定理から $f(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} z^{-2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-3k}$ で, 留数は z^{-1} の係数だから,

$$\int_C f(z)\,dz = \begin{cases} 2\pi i \binom{3k-1}{k} & (n = 3k-1 \text{ の場合}), \\ 0 & (\text{その他の場合}). \end{cases}$$

問題 3. r を $r \neq 1, 2$ なる正の実数とし, C を原点中心で半径 r の円に正の向きを入れたものとする. 次の複素積分の値を求めよ.

$$\int_C \frac{z^2}{(z-1)(z^2+2z+4)} \, dz.$$

解答. 被積分函数 $f(z) := \frac{z^2}{(z-1)(z^2+2z+4)}$ は $z = 1, \alpha := -1 + \sqrt{3}i, \beta := -1 - \sqrt{3}i$ に 1 位の極を持つ有理函数. 留数定理から $I := \int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{w:C \text{ の内側の極}} \operatorname{Res}_{z=w} f(z)$. $|\alpha| = |\beta| = 2$ に注意して

(i) $r < 1$ の場合, C の内側に極はないので $I = 0$.

(ii) $1 < r < 2$ の場合, C の内側に極は $z = 1$ だけなので $I = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi i \left. \frac{z^2}{z^2+2z+4} \right|_{z=1} = \frac{2\pi i}{7}$.

(iii) $2 < r$ の場合, $I = 2\pi i \big(\operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\alpha} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\beta} f(z) \big) = 2\pi i \big(\frac{1}{7} + \frac{9+\sqrt{3}i}{21} + \frac{9-\sqrt{3}i}{21} \big) = 2\pi i$.

問題 4. $a \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\pi/2)$, つまり a は複素数であって $\pi/2$ の整数倍ではないものとする. 複素関数

$$f(z) := \frac{\tan z}{z - a}$$

の全ての極を求め, その位数と留数を答えよ.

解答. $f(z) = \frac{\sin z}{(z-a)\cos z}$ 及び $\sin z, \cos z, z - a$ が全て整函数であることに注意して, $z = a$ と $z = (n + 1/2)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ が極で, 全て 1 位. 留数は $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \tan a$, $\operatorname{Res}_{z=(n+1/2)\pi} f(z) = -((n+1/2)\pi - a)^{-1}$. 後者については, $\alpha := (n+1/2)\pi$ として,

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha} \tan z = \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \frac{\sin z}{\cos z} = \sin\alpha \cdot \lim_{z\to\alpha} \frac{z-\alpha}{\cos z} = \sin\alpha \cdot \frac{1}{(\cos z)'|_{z=\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{-\sin\alpha} = -1.$$

コメント. 各問題 20 点満点で採点しました.

問題 3 は $r < 1$ と $1 < r < 2$ の場合を 6 点ずつ, $2 < r$ の場合を 8 点ずつとしました.

問題 4 は $z = a$ の場合を 5 点, 残りを 15 点としました.

以上です.