現代数学基礎 CⅢ　中間試験解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2020WC3.html

問題 1. z を複素変数とし, $f(z)$ をその複素関数とする.

(1) z の実部と虚部への分解を $z=x+iy$ とし, また $f(z)$ の極座標表示を $f(z)=R(x,y)\big(\cos\varphi(x,y)+i\sin\varphi(x,y)\big)$ とする. $f(z)$ の z に関する Cauchy-Riemann 方程式は次のように書けることを示せ.

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

(2) $f(z)$ が正則かつ $|f(z)|$ が定数の時, $f(z)$ も定数であることを示せ.

解答. 偏微分を $R_x := \frac{\partial R}{\partial x}$ のように略記する.

(1) $f=u+iv$ と書くと $u=R\cos\varphi$, $v=R\sin\varphi$ であり, 微分の連鎖律から

$$\begin{aligned} u_x &= u_R R_x + u_\varphi\varphi_x = \cos\varphi\cdot R_x - R\sin\varphi\cdot\varphi_x, \quad u_y = u_R R_y + u_\varphi\varphi_y = \cos\varphi\cdot R_y - R\sin\varphi\cdot\varphi_y, \\ v_x &= v_R R_x + v_\varphi\varphi_x = \sin\varphi\cdot R_x + R\cos\varphi\cdot\varphi_x, \quad v_y = v_R R_y + v_\varphi\varphi_y = \sin\varphi\cdot R_y + R\cos\varphi\cdot\varphi_y. \end{aligned}$$

従って Cauchy-Riemann 方程式 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ はそれぞれ

$$\cos\varphi\cdot R_x - R\sin\varphi\cdot\varphi_x = \sin\varphi\cdot R_y + R\cos\varphi\cdot\varphi_y, \tag{a}$$
$$\cos\varphi\cdot R_y - R\sin\varphi\cdot\varphi_y = -\sin\varphi\cdot R_x - R\cos\varphi\cdot\varphi_x \tag{b}$$

と書ける. $(a)\times\cos\varphi+(b)\times\sin\varphi$ 及び $(a)\times\sin\varphi-(b)\times\cos\varphi$ から結論を得る.

(2) 極座標表示 $f=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ で R が定数だから $R_x=R_y=0$. すると (1) より $\varphi_x=\varphi_y=0$ となり, φ も定数. 従って f は定数である.

コメント. (1) を 20 点, (2) を 10 点として, 計 30 点満点で採点しました. 平均点は 20.3 点でした.
(2) の示し方は色々あって, 例えば整関数に関する Liouville の定理を使っても示せます.

問題 2. a を整数ではない実数とする. 複素関数 $f(z) := \dfrac{\cot z}{z-a}$ の全ての孤立特異点を求め, さらに極に対してはその位数と留数を求めよ.

解答. $\cot z = \frac{1}{\tan z} = \frac{\cos z}{\sin z}$ より

(1) $a\notin\mathbb{Z}\pi/2$ の場合, $z=a$ と $z=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ が極. 全て位数は 1 で, 留数は

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) &= \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\cot z = \cot a, \\ \operatorname*{Res}_{z=n\pi} f(z) &= \lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)f(z) = \lim_{z\to n\pi}\frac{\cos z}{z-a}\frac{z-n\pi}{\sin z} = \frac{\cos n\pi}{n\pi-a}\cdot\frac{1}{(\sin z)'}\bigg|_{z=n\pi} \\ &= \frac{\cos n\pi}{n\pi-a}\frac{1}{\cos n\pi} = \frac{1}{n\pi-a}. \end{aligned}$$

(2) $a\in(\mathbb{Z}\pi/2)\setminus(\mathbb{Z}\pi)$, つまり π の半整数倍の場合, $z=a$ は除去可能特異点で, $z=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ が極. 位数は全て 1 で, 留数は (1) と同様の計算で $\operatorname{Res}_{z=n\pi}f(z)=(n\pi-a)^{-1}$.

(3) $a\in\mathbb{Z}\pi\setminus\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\pi\setminus\{0\}$, つまり π の整数倍であって 0 ではない場合, $a=m\pi$ と書くと $f(z)$ の極は $z=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$. 位数は $n\neq m$ なら 1, $n=m$ なら 2 で, 留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=n\pi} f(z) = \text{(1) と同様の計算} = \frac{1}{n\pi-m\pi},$$

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=m\pi} f(z) &= \lim_{z\to m\pi} \frac{d}{dz}\Big((z-m\pi)^2 f(z)\Big) = \lim_{z\to m\pi} \frac{d}{dz}\Big((z-m\pi)\cot z\Big) = \lim_{z\to m\pi}\Big(\cot z - \frac{z-m\pi}{\sin^2 z}\Big) \\
&= \lim_{z\to m\pi} \frac{\sin z\cos z - (z-m\pi)}{\sin^2 z} \overset{(*)}{=} \lim_{z\to m\pi} \frac{(\cos^2 z - \sin^2 z) - 1}{2\sin z\cos z} \\
&= \lim_{z\to m\pi} \frac{\cos 2z - 1}{\sin 2z} \overset{(*)}{=} \lim_{z\to m\pi} -\frac{2\sin 2z}{2\cos 2z} = 0.
\end{aligned}$$

但し $*$ はロピタルの定理を用いた.

コメント. (1) を 15 点, (2) を 5 点, (3) を 10 点として, 計 30 点満点で採点しました. 平均点は 14.7 点でした.

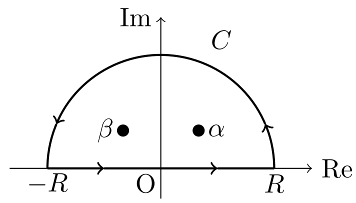
問題 3. b を正の実数とする. 半径 R の上半円 C と線分 $[-R,R]$ からなる積分路上での複素積分 $\displaystyle\int \frac{z^2}{z^4+b^4}dz$ を利用して, 次の実積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+b^4}\,dx.$$

解答. $f(z) := \frac{z^2}{z^4+b^4}$ と書くと, f は積分路上とその内部から極を除いた所で正則だから, 留数定理が使える.

R が十分大きければ, 積分路の内部にある f の極は $\alpha := be^{\pi i/4}$ と $\beta := be^{3\pi i/4}$ で, それぞれ 1 位である (右図を参照). 従って留数定理より

$$\int_C f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(z)dz = 2\pi i\Big(\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\beta} f(z)\Big).$$



$z=\alpha$ での留数は, ロピタルの定理を使うと

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) = \lim_{z\to\alpha} \frac{(z-\alpha)z^2}{z^4+b^4} = \frac{\big((z-\alpha)z^2\big)'}{(z^4+b^4)'}\bigg|_{z=\alpha} = \frac{z^2}{4z^3}\bigg|_{z=\alpha} = \frac{1}{4\alpha} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4b}$$

と計算できる. 同様に $\operatorname{Res}_{z=\beta} f(z) = e^{-3\pi i/4}/(4b)$. ここで半円 C での積分は, R が十分大きければ

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \ell(C)\cdot\sup_{z\in C}|f(z)| = \pi R\cdot\sup_{z\in C}\frac{R^2}{|z^4+b^4|} = \pi R\cdot\frac{R^2}{R^4-b^4}$$

と評価できるので, $R\to\infty$ で $\int_C f(z)dz \to 0$. 従って求めたい積分 I は

$$I = \lim_{R\to\infty}\Big(\int_C f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(z)dz\Big) = 2\pi\Big(\frac{e^{-\pi i/4}}{4b} + \frac{e^{-3\pi i/4}}{4b}\Big) = \frac{\pi}{\sqrt{2}b}.$$

コメント. 留数定理を使うところまでを 5 点, 留数の計算を 15 点, $\int_C$ の評価を 10 点, 残りを 10 点として, 計 40 点満点で計算しました. 平均点は 25.5 点でした.

全体のコメント

計 100 点で採点しました. 平均点は $20.3+14.7+25.5=60.5$ 点でした.

得点分布は次の通りです.

得点	–39	40–74	75–89	90–
人数	16	12	22	8

得点が 40 点未満の人には追加レポートを出します. NUCT で確認して下さい.