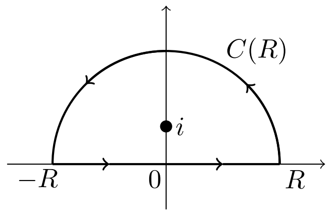
2020 年度秋学期 現代数学基礎 CIII　　レポート問題 7,8 解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

レポート問題 7. 右下図の積分路 $C(R)$ 上の複素積分の R についての極限を考えることで, 次の実積分に関する等式を示せ. 但し $n \in \mathbb{N}$ とする.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

解答. R が十分大きければ, $f(z) := (1+z^2)^{-(n+1)}$ の $C(R)$ の内部での極は $z=i$ のみで位数は $n+1$. よって留数定理から



$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{2\pi i}{n!}\Big(\frac{d^n}{dz^n}\frac{(z-i)^{n+1}}{(z^2+1)^{n+1}}\Big)\Big|_{z=i} \\ &= 2\pi i \cdot (-1)^n \binom{2n}{n} (2i)^{-2n-1} = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\end{aligned}$$

一方, 上半円周部分を A と書くと $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_A f(z)\,dz$ で,

$$\Big|\int_A f(z)\,dz\Big| \le \pi R \cdot \sup_{z\in A} |f(z)| = \pi R \cdot \frac{1}{\inf_{z\in A}|z^2+1|} = \frac{\pi R}{R^2-1} \qquad (\sharp)$$

により $R \to \infty$ で $\int_A f(z)\,dz \to 0$ が分かる. 以上から結論が得られる.

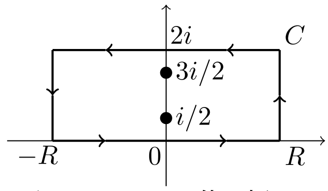
コメント. 留数計算を 2 点, A 上の積分の評価を 2 点, 残りの部分を 1 点満点で, 計 5 点満点で採点しました. 平均点は 4.5 点でした.

($\sharp$) の評価で分母を R^2+1 にしている答案がいくつかありましたが, $R^2+1 = \sup_{z\in A} \left|z^2+1\right|$ なので, 上からの評価には使えません.

レポート問題 8. 双曲余弦関数 $\cosh z := (e^z + e^{-z})/2$ に関する次の実積分を, $z = -R,\ R,\ R+2i,\ -R+2i$ を頂点にもつ長方形の辺上での $f(z) := e^{-2\pi i z\xi}/\cosh(\pi z)$ の複素積分を用いて計算せよ. 但し $\xi \in \mathbb{R}$ とする.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)} dx.$$

解答. 求める積分を $I := \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$, $f(z) := e^{-2\pi i z\xi}/\cosh(\pi z)$ と書く. 積分路を C と書くと



$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_{R}^{R+2i} f(z)\,dz \\ &\quad + \int_{R+2i}^{-R+2i} f(z)\,dz + \int_{-R+2i}^{-R} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

C の内部にある $f(z)$ の極は $e^{\pi z} + e^{-\pi z} = 0$ の解, つまり $\alpha := i/2$ と $\beta := 3i/2$. どちらも 1 位の極で, $z=\alpha$ での留数は

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) &= \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = \lim_{z\to\alpha} e^{-2\pi i z\xi}\frac{2(z-\alpha)}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}} = \lim_{z\to\alpha} 2e^{-2\pi i z\xi} e^{\pi z}\frac{(z-\alpha)}{e^{2\pi z}+1} \\ &= \lim_{z\to\alpha} 2e^{-2\pi i z\xi} e^{\pi z}\frac{(z-\alpha)}{e^{2\pi z}-e^{2\pi\alpha}} = 2e^{-2\pi i \alpha\xi} e^{\pi\alpha}\, \frac{1}{(e^{2\pi z})'}\Big|_{z=\alpha} = 2e^{-2\pi i\alpha\xi}e^{\pi\alpha}\frac{1}{2\pi e^{2\pi\alpha}} = \frac{e^{\pi\xi}}{\pi i}.\end{aligned}$$

同様に $z=\beta$ での留数は $-e^{3\pi\xi}/(\pi i)$. よって留数定理から

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\Big(\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\beta} f(z)\Big) \;=\; 2\pi i\left(\frac{e^{\pi\xi}}{\pi i} - \frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i}\right).$$

$R\to\infty$ で $\int_R^{R+2i}$ および $\int_{-R+2i}^{-R}$ の部分は 0 に収束する. 実際, R が十分大きければ, $[R, R+2i]$ 上では $\left|e^{-2\pi iz\xi}\right| \le e^{4\pi|\xi|}$ 及び

$$|\cosh \pi z| \;=\; \frac{1}{2}\left|e^{\pi z}+e^{-\pi z}\right| \;\ge\; \frac{1}{2}\left||e^{\pi z}|-\left|e^{-\pi z}\right|\right| \;\ge\; \frac{1}{2}\big(e^{\pi R}-e^{-\pi R}\big) \;\ge\; \frac{1}{4}e^{\pi R}$$

から

$$\left|\int_R^{R+2i} f(z)\,dz\right| \;\le\; 2\sup_{z\in[R,R+2i]}|f(z)| \;\le\; \frac{4e^{4\pi|\xi|}}{e^{\pi R}}$$

となって, $R\to\infty$ で 0 に収束することが分かる. $[-R,-R+2i]$ 上でも同様の議論が成立する. また $\int_{R+2i}^{-R+2i} f(z)\,dz = -e^{4\pi\xi}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz$. 従って

$$I - e^{4\pi\xi}I \;=\; -2e^{2\pi\xi}(e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi})$$

となるので,

$$I \;=\; \frac{2e^{2\pi\xi}(e^{\pi\xi}-e^{-\pi\xi})}{e^{4\pi\xi}-1} \;=\; \frac{1}{\cosh(\pi\xi)}.$$

コメント. 留数計算を 2 点, 積分の評価を 2 点, 残りの部分を 1 点満点で, 計 5 点満点で採点しました. 平均点は 3.0 点でした.