§5 正則函数の性質

§5.1

命題5.1.1. (Cauchyの不等式)

D: 中心z. 半径Rの開円板

f: $\overline{D}$上の正則函数　$\|f\|_{\partial D} := \sup_{z\in\partial D}|f(z)|$

$\forall n\in\mathbb{N}$　$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{R^n}\|f\|_{\partial D}$$

∵ 導函数の積分表示(定理3.3.2)から //

定理5.1.2. (正則函数のTaylor展開)

D: 中心cの開円板, f: D上正則.

$\forall z\in D$　$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \qquad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}dw$$

∵ 積分表示(定理3.3.1)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

に　$$(w-z)^{-1} = (w-c-(z-c))^{-1} = (w-c)^{-1}\sum_{n\ge 0}\left(\frac{z-c}{w-c}\right)^n$$ を代入.

項別積分できる. //

これは
「定理1.4.9: 巾級数は収束半径内で正則函数を定める」の逆

定理5.1.3. 正則函数fは任意回微分可能.

$\forall n\in\mathbb{N}$で導函数$f^{(n)}$も正則.

§5.2.

整函数に関するLiouvilleの定理5.2.1.

f: 有界な整函数. （$\mathbb{C}$上有界: $\exists B \in \mathbb{R}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $|f(z)| < B$）

$\Rightarrow$ fは定数函数

∵ $\forall z \in \mathbb{C}$ $f'(z) = 0$ を示せば良い（定理2.2.4, $\mathbb{C}$は領域）

Cauchyの不等式より. $\forall R \in \mathbb{R}_{>0}$ で

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{R} \|f\|_{\partial D(0,R)} \leq B/R$$

$R \to \infty$ として $|f'(z)| = 0$. //

代数学の基本定理5.2.2.

定数ではない$\mathbb{C}$係数多項式 $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$

は$\mathbb{C}$で根を持つ

∵ もし根がなければ $1/P(z)$は整函数.

更に有界. 実際.

$$P(z)/z^n = a_n + (a_{n-1}/z + \cdots + a_0/z^n)$$

で $\lim_{z\to\infty}(\quad) = 0$ だから. $c := |a_n|/2$ とすれば

$\exists R \in \mathbb{R}_{>0}$ $|z| > R \Rightarrow |P(z)/z^n| \geq |a_n| - c = c$

$\Rightarrow |1/P(z)| \leq |c z^n| < c/R^n$

よって Liouvilleの定理より $1/P(z)$は定数. //

§5.3. 解析接続

定義. $S \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ が S の集積点 (極限点)
$\overset{\text{def}}{\iff} \exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, $z_n \neq z$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.

一致の定理 5.3.1. $\Omega \subset \mathbb{C}$: 領域 $f: \Omega \to \mathbb{C}$. 正則.
$\exists \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Omega$, $z_k \neq z_l$ (比較), Ω に集積点を持つ, $f(z_k) = 0$ ($\forall k$)
$\Rightarrow$ $f = 0$ ($\forall z \in \Omega$ $f(z) = 0$)

系 5.3.2. 領域 Ω 上の正則函数 f と g が,
$\phi \neq U \subset \Omega$, 開. の上で一致. $\Rightarrow$ Ω 上 $f = g$
$\because$ $\exists D(z, r) \subset U$ を取る.
$z_k := z + r/k$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$ とすれば
$\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Omega$, $z_k \neq z_l$, $\lim z_k = z \in \Omega$, $(f-g)(z_k) = 0$
なので, 一致の定理より Ω 上 $f - g = 0$ //

定義 U, V: 領域. $U \cap V \neq \phi$, $f: U \to \mathbb{C}$ 正則, $g: V \to \mathbb{C}$: 正則
$f|_{U\cap V} = g|_{U \cap V}$ の時. g を f の (V 上への) 解析接続という.
↑定義域を $U \cap V$ に制限

5.3.2 より Vへの解析接続は存在すれば一意.

例. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$: $|z| < 1$ で正則
$g(z) = \frac{1}{1-z}$: $z \neq 1$ 〃.
g は f の $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ への解析接続

§6 有理型函数

§6.1. 孤立特異点

<u>定義</u>　$s\in\mathbb{C}$ が函数 f の孤立特異点
:$\iff$ $s\in{}^{\exists}U\subset\mathbb{C}$, 開. $U\setminus\{s\}$ で f は定義されているが、
s では f は 〃 いない.

<u>記号</u>　$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$　$\lim_{n\to\infty}1/z_n=0$ の時 $\lim_{n\to\infty}z_n=\infty$ と書く.

f: 函数. $\lim_{z\to w}1/f(z)=0$ の時 $\lim_{z\to w}f(z)=\infty$ と書く.

<u>定義</u>　$s\in\mathbb{C}$: 函数 f の孤立特異点, $s\in{}^{\exists}U$, $U\setminus\{s\}$ で f は正則
(1) $\lim_{z\to s}f(z)$ が $\mathbb{C}$ で存在する時. s を除去可能特異点という
(2) 〃 $=\infty$ の時. s を 極 という
(3) (1) と (2) 以外の場合. s を 真性特異点 という.

<u>例1.6.1.1.</u>　(1) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$　$z=0$ は除去可能特異点
Taylor展開で示せる → $\because$ $\lim_{z\to 0}f(z)=1$ ← 基本的な極限

(2) 有理函数 $f(z)=P(z)/Q(z)=P(z)/a\prod_{\ell=1}^{N}(z-s_\ell)^{m_\ell}$
Q の根 s_ℓ $(\ell=1,\dots N)$ は f の極

(3) $f(z)=\exp(1/z)$. $z=0$ は真性特異点
$\because$　$z\in\mathbb{R}_{>0}$ で $z\to 0$ とすると $\lim_{z\to+0}f(z)=\infty$
$z\in\mathbb{R}_{<0}$ で $z\to 0$ とすると $\lim_{z\to-0}f(z)=0$ //

極と零点について.

定理6.1.4. $V \subset \mathbb{C}$: 開, $f : V \to \mathbb{C}$ 正則, 定数関数ではない.
$c \in V$. $f(c) = 0$

$\Rightarrow$ $c \in {}^{\exists}U \subset V$: 開.
$\exists!$ $g : U \to \mathbb{C}$, 正則, 零点を持たない.
$\exists!$ $n \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$f(z) = (z - c)^n g(z) \quad \forall z \in U$$

(:) 正則関数のTaylor展開 (定理5.1.2) から. //

定義 この n を f の零点 c における位数という.

定理6.1.5. $c \in \mathbb{C}$: 函数 f の極
$\Rightarrow$ $c \in {}^{\exists}U \subset \mathbb{C}$, 開.
$\exists!$ $h : U \to \mathbb{C}$. 正則. 零点を持たない
$\exists!$ $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ $\quad f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-c)^n} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(:) $1/f(z)$ に定理6.1.4.を適用 //

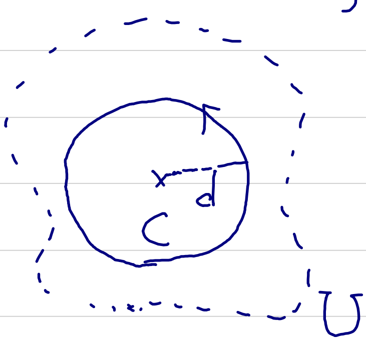
定義 この n を f の極 c における位数という

§6.2. Laurent 展開

命題6.2.2.　$c\in\mathbb{C}$：函数 f の n 位の極

$c\in{}^{\exists}U\subset\mathbb{C}$, 開　${}^{\exists!}G(z)$：U 上の正則函数

$$f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-c}+G(z)$$



$$a_{-k}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=d}(w-c)^{k-1}f(w)\,dw$$

$(k=1,\dots,n)$　　正向き.　$D(c,d)\subset U$ なる ${}^{\forall}d\in\mathbb{R}_{>0}$.

：f の極 c での Laurent 展開

∵ 円環領域での Laurent 展開(定理6.2.1)から. //

定義6.2.3.　上の状況で $\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-c}$ を f の極 c での主部.

$a_{-1}=:\operatorname*{Res}_{z=c} f(z)$　〃　留数という.

系.

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z)=\lim_{z\to c}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-c)^n f(z)\right)$$

∵

$$(z-c)^n f(z)=a_{-n}+\cdots+(z-c)^{n-1}a_{-1}+(z-c)^n\times G(z)$$

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\quad〃\quad\right)\Big|_{z=c}=0+\cdots+0+(n-1)!\,a_{-1}+0$$

$$\frac{d^k}{dz^k}\left(g(z)\cdot h(z)\right)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}g^{(j)}(z)\,h^{(k-j)}(z)$$

$$\therefore\ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-c)^n G(z)\right)=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\underbrace{\frac{d^j}{dz^j}(z-c)^n}_{}\times G^{(n-1-j)}(z)$$

$$0\xleftarrow{z\to c}\text{定数}\times(z-c)^{n-j}$$

§6.3. 有理型函数

定義6.3.1. $U \subset \mathbb{C}$: 開

函数 f が U 上の有理型函数

$:\Longleftrightarrow \exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$, U に集積点を持たない,

f は $U \setminus \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 上正則, z_n は f の極

例1. 有理函数 $f(z) = P(z)/Q(z) = P(z)/a\prod_{k=0}^{l-1}(z-z_k)^{m_k}$

は $\mathbb{C}$ 上有理型

($z_n := z_{(n \bmod l)}$ とすれば $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ は集積点を持たない)

定義. (1) 函数 f が無限遠で正則 $:\Longleftrightarrow$ $f(1/z)$ が $z=0$ で正則

〃 で極を持つ $:\Longleftrightarrow$ 〃 で極を持つ

(2) 〃 拡張された複素数平面 $\overline{\mathbb{C}}$ で有理型

$:\Longleftrightarrow$ f は $\mathbb{C}$ 上有理型 かつ 無限遠で正則又は極をもつ.

定理6.3.2. $\overline{\mathbb{C}}$ 上有理型函数は有理函数.

註 (問6.3) $\overline{\mathbb{C}} \cong S^2$ 同相

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$z \longleftrightarrow P$

$\infty \longleftrightarrow N$