2020 年度秋学期 現代数学基礎 CIII　　レポート問題 5,6 解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

各問題 5 点満点で採点しました.

レポート問題 5. D を原点中心で半径 1 の開円板とし, f を D 上の正則関数とする.

(1) $0 < r < 1$ なる実数 r に対し次の等式を示せ. 但し積分路は円に正の向きを入れたものとする.

$$2f'(0) \,=\, \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)-f(-\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta.$$

(2) $d := \sup_{z,w\in D}|f(z)-f(w)|$ とすると, $2\,|f'(0)| \le d$ となることを示せ.

解答. (1) 正則関数 f を原点を中心として Taylor 展開すると, 正則関数 g を用いて $f(\zeta) = f(0)+f'(0)\zeta+\zeta^2 g(\zeta)$ と書ける. 従って

$$\frac{f(\zeta)-f(-\zeta)}{\zeta^2} \,=\, \frac{2f'(0)}{\zeta} + g(\zeta) - g(-\zeta).$$

これを積分すると, $g(\zeta)-g(-\zeta)$ は正則関数だから積分には寄与しないので,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)-f(-\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta \,=\, \frac{2f'(0)}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{d\zeta}{\zeta} \,=\, 2f'(0).$$

(2) 積分の評価式 $\left|\int_C g(z)dz\right| \le \ell(C)\cdot \sup_{z\in C}|f(z)|$ と (1) から

$$\begin{aligned}|2f'(0)| \,&=\, \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)-f(-\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta\right| \,\le\, \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi r\cdot \sup_{|\zeta|=r}\left|\frac{f(\zeta)-f(-\zeta)}{\zeta^2}\right| \\ &=\, \frac{1}{r}\sup_{|\zeta|=r}|f(\zeta)-f(-\zeta)| \,\le\, \frac{1}{r}\sup_{z,w\in D}|f(z)-f(w)| \,=\, \frac{d}{r}.\end{aligned}$$

この不等式が任意の $0<r<1$ で成立するので, 右辺で $r\to 1$ とした $2\,|f'(0)| \le d$ が成立する.

コメント. (1) は 3 点, (2) は 2 点満点で採点しました. 平均点は 3.6 点でした.

(2) で解答の議論を最初から $r=1$ とした答案がいくつかありましたが, f は $|z|=1$ では定義されていないので, そのような議論はできません.

レポート問題 6. $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の正則関数 $f(z) := \exp\bigl(t(z-z^{-1})/2\bigr)$ を考える. 円環領域の Laurent 展開 (定理 6.2.1) を $r=0$, $R=\infty$, $d=1$ で f に適用して, 得られた Laurent 展開を

$$\exp\bigl(t(z-z^{-1})/2\bigr) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) z^n$$

と書く. 関数 $J_n(t)$ を n 次の **Bessel 関数**と呼ぶ. 以下の等式を示せ.

(1) $J_n(t) \,=\, \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t\sin\theta - n\theta)}\,d\theta \,=\, \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,d\theta.$

(2) $n\ge 0$ ならば $J_n(t) \,=\, \displaystyle\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2k+n}$, $n<0$ ならば $J_n(t) \,=\, \displaystyle\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^{n+k}}{k!(k-n)!}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2k-n}$.

(3) $J_n''(t) + t^{-1}J_n'(t) + (1-n^2/t^2)J_n(t) = 0.$

解答. (1) Laurent 展開の係数の積分表示から, C を原点中心で半径 1 の正向きの円として

$$J_n(t) \,=\, \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \,=\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{in\theta}}d\theta.$$

但し最右辺では積分路 C を $z = e^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le \pi$ と表示した. 問題の最初の等式は $f(e^{i\theta})/e^{in\theta} = \exp\bigl(i(t\sin\theta - n\theta)\bigr)$ から得られる. 二番目の等式は, $w(\theta) := t\sin\theta - n\theta$ が奇関数であることに注意して, 次のように式変形して得られる.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iw(\theta)}d\theta \;=\; \int_0^{\pi} e^{iw(\theta)}\,d\theta + \int_{-\pi}^{0} e^{iw(\theta)}\,d\theta \;=\; \int_0^{\pi} e^{iw(\theta)}\,d\theta + \int_0^{\pi} e^{-iw(\theta)}\,d\theta \;=\; 2\int_0^{\pi} \cos w(\theta)\,d\theta.$$

(2) $e^z = \sum_{l=0}^{\infty} z^l/l!$ から

$$\begin{aligned}\exp\bigl(t(z - z^{-1})/2\bigr) \;&=\; e^{tz/2}e^{-t/(2z)} \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(tz/2)^l}{l!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-t/2z)^m}{m!}\\ &=\; \sum_{l,m=0}^{\infty} z^{l-m}\frac{(-1)^m}{l!\,m!}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{l+m} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n \sum_{l,m\ge 0,\; l-m=n}\frac{(-1)^m}{l!\,m!}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{l+m}.\end{aligned}$$

$n \ge 0$ の場合, 最終式の二番目の和で $l = m + n$ なので

$$J_n(t) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m+n)!\,m!}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2m+n}$$

となり, m を k と書いて前半の主張を得る. 同様に $n < 0$ の場合は, 二番目の和で $m = l - n$ なので

$$J_n(t) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l-n}}{l!\,(l-n)!}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)^{2l-n}$$

となり, l を k に置き直せば $(-1)^{l-n} = (-1)^{l+n}$ より後半の主張が得られる.

(3) 常微分方程に関する基本的な知識を使う[*1]. $t = 0$ を確定特異点とする常微分方程式

$$f''(t) + t^{-1}f'(t) + (1 - n^2/t^2)f(t) \;=\; 0 \qquad (\sharp)$$

の級数解を Frobenius の方法を用いて求める. $d_t := \frac{d}{dt}$ と略記して, まず方程式 $(\sharp)$ を $Lf(t) = 0$, $L := t^2d_t^2 + td_t + (t^2 - n^2)$ と書き直す. 冪関数 t^ρ に微分作用素 L を作用させると $Lt^\rho = t^\rho\bigl(\rho(\rho - 1) + \rho + t^2 - n^2\bigr)$ となるので, 決定方程式は $\rho(\rho-1) + \rho - n^2 = 0$. よって $\rho = \pm n$ が方程式 $(\sharp)$ の特性冪数であり, 級数解は $f_1(t) = t^n\sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m$ 及び $f_2(t) = t^{-n}\sum_{l=0}^{\infty} b_l t^l$ と書ける.

さて $n \ge 0$ の場合, 級数 $f_1(t)$ を方程式 $(\sharp)$ に代入して t の冪ごとに係数比較すると, $m \ge 2$ なら $\bigl((n+m)(n+m-1) + (n+m) - n^2\bigr)a_m + a_{m-2} = 0$ となり, a_m の漸化式 $m(n+m)a_m + a_{m-2} = 0$ が得られる. 従って

$$a_{2k} \;=\; \frac{(-1)^k}{(2k)!!\,(2n+2k)(2n+2k-2)\cdots(2n+2)}a_0$$

となり, 特に $a_0 = (n!2^n)^{-1}$, $a_1 = 0$ とすると方程式 $(\sharp)$ の級数解 $f_1(t) = \sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}(t/2)^{2k+n}$ が得られる. これと (2) から $n \ge 0$ の場合の主張が成立する.

$n < 0$ の場合は, 級数 $f_2(t)$ を方程式 $(\sharp)$ に代入して b_l の漸化式 $l(l-2n)b_l + b_{l-2} = 0$ が得られ, $b_0 = \bigl((-n)!2^{-n}\bigr)^{-1}$, $b_1 = 0$ として級数解 $f_2(t) = \sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!(k-n)!}(t/2)^{2k-n}$ が得られる. これと (2) から $n < 0$ の場合の主張が成立する.

コメント. (1) は 1 点, (2) は 2 点, (3) は 2 点満点で採点しました. 平均点は 3.5 点でした.
(3) は (2) の級数表示を項別微分して微分方程式に代入して示すこともできます.

[*1] 例えば　高野恭一「常微分方程式」新数学講座 6、朝倉書店　の §13.2.