**2020 年度秋学期 現代数学基礎 CIII　　レポート問題 3,4 解答**

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

各問題 5 点満点で採点しました.

**レポート問題 3.**　(1) $C$ を原点中心で半径 1 の正の向き付けを持つ円とする. 次の複素積分の値を求めよ.

$$\int_C \frac{e^z}{z} dz.$$

(2) その値から実積分に関する次の等式を導け.

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta)\, d\theta \;=\; 2\pi.$$

**解答.**　(1) $e^z/z = (e^z-1)/z + 1/z$ と分解する. $f(z) := (e^z-1)/z$ は $f(0)=0$ と定義すれば $\mathbb{C}$ 上正則なので, Cauchy の積分定理より $\int_C f(z)dz = 0$. よって

$$\int_C \frac{e^z}{z} dz \;=\; \int_C \frac{1}{z} dz \;=\; 2\pi i.$$

(2) $C$ を $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ とパラメータ表示すれば,

$$e^z \;=\; \exp(e^{i\theta}) \;=\; \exp(\cos\theta + i\sin\theta) \;=\; \exp(\cos\theta)\exp(i\sin\theta) \;=\; e^{\cos\theta}\big(\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)\big)$$

より (1) の積分は

$$\int_C \frac{e^z}{z} dz \;=\; \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\big(\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)\big)\cdot i\, d\theta$$

と書き直せる. 従って (1) の結果から

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta)\, d\theta \;=\; \mathrm{Im} \int_C \frac{e^z}{z} dz \;=\; 2\pi.$$

**コメント.** (1) は 2 点, (2) は 3 点満点で採点しました. 平均点は 4.9 点でした.

**レポート問題 4.** $u$ を原点中心の単位閉円板 $\overline{D(0,1)} = \{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ を含む開集合上の実数値関数であって, 2 回連続微分可能かつ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) \;=\; 0$$

が任意の $z = x+iy \in D(0,1)$ で成立するものと仮定する.

(1) $D(0,1)$ 上の正則関数 $f$ であって $\mathrm{Re}(f) = u$ となるものが存在することを示せ. またこのような $f$ の虚部は定数を足す分を除いて一意であることを示せ.

(2) 問題 4.2.5 と (1) を用いて次の等式を示せ.

$$u(re^{i\theta}) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\varphi) u(e^{i\varphi})\, d\varphi.$$

但し

$$P_r(\gamma) \;:=\; \frac{1-r^2}{1-2r\cos\gamma + r^2}.$$

こうして得られた (2) の等式を調和関数の Poisson 積分表示と呼ぶ.

**解答.** $u_x := \partial_x u$ 等と略記する.

(1) 二変数関数 $v(x,y)$ を

$$v(x,y) := -\int_0^x u_y(p,0)dp + \int_0^y u_x(x,q)dq$$

で定める. すると $v_y(x,y) = u_x(x,y)$ であり, また $v_x(x,y) = -u_y(x,0) + \int_0^y u_{xx}(x,q)dq$ と仮定 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ から $v_y(x,y) = -u_y(x,0) - [u_y(x,q)]_{q=0}^y = -u_x(x,y)$ が従う. よって $f := u + iv$ は Cauchy-Riemann 方程式を満たすので正則関数である.

$f$ の虚部が別の関数 $\widetilde{v}$ だとすると, Cauchy-Riemann 方程式から $w := v - \widetilde{v}$ は $\partial_x w = 0$ かつ $\partial_y w = 0$ を満たす. 従って $w$ は定数関数で, $v$ は一意に定まる.

(2) $f$ を (1) の正則関数とする. (1) の議論から, $R_0 > 1$ なる実数 $R_0$ が存在して, $f$ は $D(0,R_0)$ 上正則だとして構わない. 問題 4.2.5 (2) から $z = re^{i\theta} \in D(0,1)$ と $r < R < R_0$ に対して

$$f(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \operatorname{Re}\Big(\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\Big) d\varphi.$$

この式の実部を取ると,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\Big(\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\Big) &= \operatorname{Re}\frac{(Re^{i\varphi}+z)(Re^{-i\varphi}-\overline{z})}{(Re^{i\varphi}-z)(Re^{-i\varphi}-\overline{z})} = \operatorname{Re}\frac{R^2 + Rre^{i(\theta-\varphi)} - Rre^{i(\varphi-\theta)} - r^2}{R^2 - Rre^{i(\theta-\varphi)} - Rre^{i(\varphi-\theta)} + r^2} \\ &= \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2}\end{aligned}$$

より

$$u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2} d\varphi.$$

$R = 1$ として結論を得る.

**コメント.** (1) は 2 点, (2) は 3 点満点で採点しました. 平均点は 3.3 点でした.

(2) で $R_0$ を取る部分は難しいので, 問題 4.2.5 を $R = 1$ として適用していても OK としました.