§2.2. 複素積分 (つづき)

命題 2.2.3. γ: 曲線 ($\mathbb{C}$の区分的に滑らかな曲線) $\exists U \supset \gamma$: 開 $f: U \to \mathbb{C}$ 連続

f, f_n $(n=0,1,2,\cdots)$: γ上連続函数

$\{f_n\}_n$ がγ上一様収束 $\lim_{n\to\infty} \|f-f_n\|_\gamma = 0$, $\|f-f_n\|_\gamma := \sup_{z\in\gamma} |f(z)-f_n(z)|$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int f_n(z)\,dz$$

定理 2.2.4. $U \subset \mathbb{C}$: 開, $f: U \to \mathbb{C}$ 連続, $\gamma \subset U$: 曲線

$F: U \to \mathbb{C}$: fの原始函数 $F' = f$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = F(w_1) - F(w_0)$$

w_0: γの始点 w_1: γの終点.

系 2.2.5. 特にγが閉曲線なら $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

始点と終点が一致する

例. C: 原点中心の正の向きの円. $f(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{Z})$

$$\int_C z^n\,dz = 2\pi i\,\delta_{n,-1}$$

$z \neq -1$ なら系2.2.5が適用可 (定義域 $\mathbb{C}$上で $F = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$)

$z = -1$ 〃 〃 不可 (〃 は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $F = \mathrm{Log}\, z$ は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$が定義域)

§2.3. 連結性と弧状連結性

定義2.3.1. $S \subset \mathbb{C}$

(1) 開集合 S が連結 $:\Longleftrightarrow$ $\nexists\, U, V \subset \mathbb{C}$ s.t. 開, $\neq \phi$,
$U \cap V = \phi$, $S = U \cup V$

領域 $:=$ 連結開集合

(2) S が弧状連結 $:\Longleftrightarrow$ $\forall z, w \in S$ $\exists$ 曲線 $\gamma \subset S$ s.t.
始点が z, 終点が w.

定理2.3.2. $\phi \neq U \subset \mathbb{C}$, 開.
U が連結 $\Longleftrightarrow$ 弧状連結

例. 開円板、多角形の内部、凸開集合は弧状連結なので領域

系2.3.3. $\Omega \subset \mathbb{C}$ 領域, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 正則
$\forall z \in \Omega$ $f'(z) = 0 \Rightarrow f$ は定数関数.

$\forall z, w \in \Omega$ $f(z) = f(w)$ を示せば良い.
Ω は弧状連結なので $\exists$ 曲線 $\gamma \subset \Omega$. 始点が z. 終点が w (定理2.3.2)
f は f の原始関数. $\int_\gamma f'(\zeta)\,d\zeta = f(w) - f(z)$ (系.2.2.4)
$f'(\zeta) = 0$ $\forall \zeta \in \Omega$ より $\int_\gamma f'(\zeta)\,d\zeta = 0$ //

§3. Cauchyの積分定理1.

自分自身と交わらない(始点・終点を除いて)

一点ではない

Jordanの閉曲線定理3.1.1.

$\gamma \subset \mathbb{C}$: 単純閉曲線 (かつ長さ正)

$\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \gamma$ は二つの領域からなる.

(i) 一つは有界 (かつ単連結) : γの内部

(ii) 一つは非有界 : γの外部

Cauchyの積分定理3.2.3.

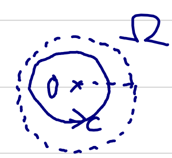
Ω : 単純閉曲線の内部である領域

$f : \Omega \to \mathbb{C}$: 正則

$\gamma \subset \Omega$: 閉曲線　　$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

例1. C: 原点中心, 正向きの円, $f(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{Z})$

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \delta_{n,-1}$$



$n \geq 0$なら Ω : Cを含む開円板

として Cauchyの積分定理が適用可.

$n < 0$だと Ω上 z^n が正則になるようにΩを取ることができない

(Cの内部に原点があるので)

Cauchyの積分表示 (定理3.3.1)

$D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|<r\}$：開円板． $\bar{D}:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|\le r\}$：Dの閉包

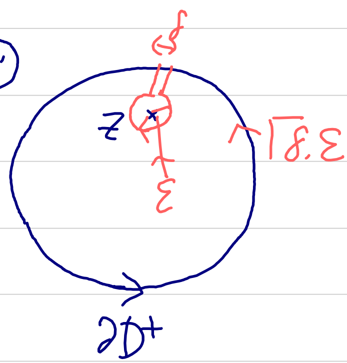
$\partial D:=\bar{D}\setminus D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|=r\}$：Dの境界

∂D^+：正の向きを入れた閉曲線

$U\subset\mathbb{C}$：$\bar{D}\subset U$ なる開集合． $f: U\to\mathbb{C}$：正則 $z\in D$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

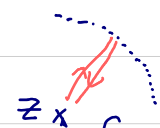
(∵)



$F(w):=f(w)/(w-z)$

Cauchyの積分公式から $\int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}}F(w)\,dw=0$

$\delta\to 0$ とすると．二つの直線部分の積分は打ち消しあう



$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}}=\int_{C_\varepsilon^-}+\int_{\partial D^+}=0$$

C_ε^-

$$\therefore \int_{\partial D^+}F(w)\,dw=-\int_{C_\varepsilon^-}F(w)\,dw \quad (☆)$$

$$F(w)=\frac{f(w)-f(z)}{w-z}+\frac{f(z)}{w-z}$$

FのC_ε上での正則性から $\exists B\in\mathbb{R}_{>0}$ $\forall w\in C_\varepsilon^-$

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right|\le B$$

$$\therefore \left|\int_{C_\varepsilon^-}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw\right|\le 2\pi\varepsilon\cdot B$$

一方で $\displaystyle\int_{C_\varepsilon^-}\frac{f(z)}{w-z}\,dw=f(z)\int_{C_\varepsilon^-}\frac{1}{w-z}\,dw$
$=f(z)\times(-2\pi i)$

← $\int_C w^n\,dw=2\pi i\,\delta_{n,-1}$ (C：原点中心．正の向き円) で $n=-1$の場合を平行移動

(☆)から $\displaystyle\left|\int_{\partial D^+}F(w)\,dw-2\pi i f(z)\right|$

$$=\left|-\int_{C_\varepsilon^-}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw\right|$$

$$\le 2\pi\varepsilon\cdot B$$

$\varepsilon\to 0$ として． $\int_{\partial D^+}F(w)\,dw=2\pi i f(z)$ //

定理3.3.2. 同じ仮定の下で $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D^+} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$

例. $f(w) = w^3 \quad D = D(1,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1|<1\} \ni z = 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{w^3}{w-1}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+}\left(\frac{w^3-1}{w-1} + \frac{1}{w-1}\right)dw$$

$\int_C z^n dz = 2\pi i\,\delta_{n,-1}$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{1}{w-1}\,dw = 1 = f(1)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{w^3}{(w-1)^2}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{(w-1)^3 + 3(w-1)^2 + 3(w-1) + 1}{(w-1)^2}\,dw$$
$$= (0+0+3+0)$$
$$= 3 = f'(1)$$

$$\frac{2!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{w^3}{(w-1)^3}\,dw = \frac{2}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{(w-1)^3 + 3(w-1)^2 + 3(w-1) + 1}{(w-1)^3}\,dw$$
$$= 2(0+3+0+0)$$
$$= 6 = f''(1)$$

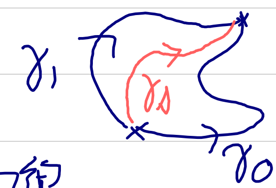
$$\frac{3!}{2\pi i}\int_{\partial D^+} \frac{w^3}{(w-1)^4}\,dw = 6(1+0+0+0) = 6 = f^{(3)}(1)$$

$n \geq 4$ $\quad \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D^+} \frac{w^3}{(w-1)^{n+1}}\,dw = n!(0+0+0+0) = 0 = f^{(n)}(1)$

//

§4 Cauchyの積分定理2

§4.1. ホモトピーと単連結領域



$h_s(t)$はγ_sのパラメータ付け.

定義4.1.1. $U \subset \mathbb{C}$:開

γ_0, γ_1: 始点と終点を共有する Uの曲線

γ_0とγ_1のホモトピー写像

$$h(s,t): [0,1]\times[a,b] \to U$$

s.t. (i) $\forall s \in [0,1]$. $h_s(t) := h(s,t): [a,b] \to U$

はUの曲線を定める

(ii) $h_0(t)$はγ_0の, $h_1(t)$はγ_1のパラメータ付け

(iii) $h_s(a)$はsによらない. (γ_0, γ_1の始点)

$h_s(b)$ 〃 . (〃 終点)

hが存在する時 γ_0とγ_1はホモトピックだという

定理4.1.2. $U \subset \mathbb{C}$:開. $f: U \to \mathbb{C}$:正則

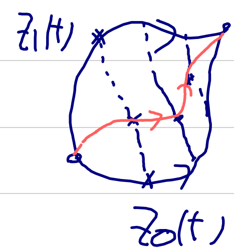
$\gamma_0, \gamma_1 \subset U$: 曲線, ホモトピック

$$\Rightarrow \int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

定義4.1.3. 領域$U \subset \mathbb{C}$が単連結 :$\Longleftrightarrow$

始点と終点を共有するUの任意の二曲線がホモトピック.

補題4.1.4. 開円板は単連結領域.



(∵) $z_0(t), z_1(t)$: γ_0とγ_1のパラメータ付け

$$h(s,t) := (1-s)z_0(t) + s z_1(t)$$

§4.2. 単連結領域とCauchyの積分定理

<u>定理4.2.1.</u> 単連結領域上の正則函数は原始函数を持つ

(方針) $z, s \in \Omega$, $\gamma \subset \Omega$: s始点, z終点の曲線

$$F(z) := \int_\gamma f(w)\,dw$$

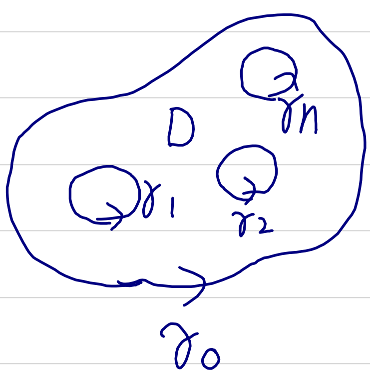
定理4.1.2.より γの取り方によらないので well-defined.

実はFがfの原始函数. //

<u>系4.2.2.</u> $\Omega \subset \mathbb{C}$: 単連結領域, $\gamma \subset \Omega$: 閉曲線, $f: \Omega \to \mathbb{C}$: 正則

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

<u>Cauchyの積分定理4.2.3.</u>



$\gamma_0, \dots, \gamma_n$: 互いに交わらない単純閉曲線

- γ_0の内部に$\gamma_1, \dots, \gamma_n$が含まれ, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$は互いに外部にある.
- $\gamma_0, \dots, \gamma_n$の向き付けは, 内部が左側にあるもの.

D: $\gamma_0, \dots, \gamma_n$で囲まれる領域

f: $\bar{D}$上の正則函数 $\left(\bar{D} := D \cup \bigcup_{k=0}^{n} \gamma_k\right)$

この時

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz$$