2020 年度秋学期 現代数学基礎 CIII　 レポート問題 1,2 解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

各問題 5 点満点で採点しました.

レポート問題 1. Fibonacci 数列

$$a_0 \;=\; a_1 \;=\; 1, \quad a_n \;=\; a_{n-2} + a_{n-1} \; (n = 2, 3, \ldots)$$

から定まる級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径を求めよ.

解答. $\alpha := (1+\sqrt{5})/2$, $\beta := (1-\sqrt{5})/2$ とすると $a_n = (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})/(\alpha - \beta)$. $0 < \beta < \alpha$ に注意して

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha^n - \beta^n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n} \frac{1-(\beta/\alpha)^{n-1}}{1-(\beta/\alpha)^n} \;=\; \alpha^{-1} \;=\; \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

従って ratio test (講義ノートの定理 1.4.2) から $(\sqrt{5}-1)/2$ が収束半径.

コメント. 平均点は 4.4 点でした. 以下のような間違いがある毎に 1 点減点して採点しました.

- 一般項を $(\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)$ としている答案がありましたが, それだと $n = 0$ で 0 になってしまい, 問題の初期条件と合いません.
- “$R = \lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1}$ なので...” あるいは “$r := \lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1}$ とすると... より $r = 1/(1+r)$ なので...” といった答案がありましたが, どちらも極限の存在を仮定した議論なので, 別にその存在を証明する必要があります.

レポート問題 2. $R \in \mathbb{R}_{>0}$ とし, 積分路 C_R を $-Ri$ から Ri へ向かう線分とする. 次の極限を求めよ

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{z+1} dz.$$

解答. 対数の主値 Log を用いると

$$\int_{C_R} \frac{1}{z+1} dz \;=\; \big[\mathrm{Log}(z+1)\big]_{-Ri}^{Ri} \;=\; \mathrm{Log}(1+Ri) - \mathrm{Log}(1-Ri).$$

極座標表示すると $1 \pm Ri = \sqrt{R^2+1}\exp(\pm i\theta)$. 但し偏角 θ は $-\pi < \theta \le \pi$ かつ $\tan\theta = R$ を満たすもの. よって実関数の対数関数 log を用いて

$$\int_{C_R} \frac{1}{z+1}\, dz \;=\; \big(\log\sqrt{R^2+1} + \theta i\big) - \big(\log\sqrt{R^2+1} - \theta i\big) \;=\; 2\theta i.$$

θ の特徴付けから $R \to \infty$ で $\theta \to \pi/2$ となるので, 求める極限は

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{z+1} dz \;=\; \lim_{R\to\infty} 2\theta i \;=\; \pi i.$$

コメント. 平均点は 3.4 点でした.

- 単に $\int \ldots = \big[\log(z+1)\big]_{-Ri}^{Ri}$ と書いている答案がありましたが, 原始関数に現れる log の分岐を明記する必要があります. 明記していない答案は 2 点減点しました. 分岐を明記すると, 例えば次のような解答になります.

複素関数 $\log z$ を次のように定める: 整数 n を固定する. $z \neq 0$ に対し, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ と $\phi \in \mathbb{R}$, $-\pi < \phi \leq \pi$ であって $z = re^{i\phi}$ となるものの組 (r, ϕ) が一意に定まる. これを用いて $\log z := \log r + (\phi + 2n\pi)i$ と定める. すると $\log(z+1)$ は $(z+1)^{-1}$ の原始関数なので,

$$\begin{aligned}\int_{C_R} \frac{1}{z+1}\,dz &= \big[\log(z+1)\big]_{-Ri}^{Ri} = \log(1+Ri) - \log(1-Ri) \\ &= \Big(\log\sqrt{R^2+1} + (\theta + 2n\pi)i\Big) - \Big(\log\sqrt{R^2+1} - (\theta + 2n\pi)i\Big) \qquad (\sharp) \\ &= 2\theta i.\end{aligned}$$

但し θ は... [以降は上の解答と同じ.]

- $\int_{C_R} \frac{1}{z+1}\,dz = \big[\log|z+1|\big]_{-Ri}^{Ri}$ としている答案がありましたが, それは実関数の積分と混乱しています.
- 最終的な結果に分岐の n が入っている答案がいくつかありましたが, それだと $(\sharp)$ で前半と後半の log の分岐を揃えていない点で間違っています. 不定積分して $= [\log(z+1)]_{-Ri}^{Ri}$ としたときに, 原始関数 $\log(z+1)$ は (多価ではない, 普通の意味での) 関数なのだから, log の分岐を指定する必要があります. すると $[\log(z+1)]_{-Ri}^{Ri} = \log(1+Ri) - \log(1-Ri)$ の前半と後半の分岐は一致して, 引き算で打ち消しあいます.