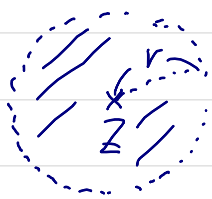
§1. 複素微分

§1.1. 複素数平面

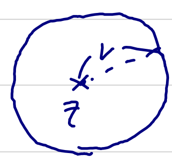
$$\mathbb{C}=\{複素数\}\supset\mathbb{R}=\{実数\}\supset\mathbb{Q}=\{有理数\}$$

(1) $z\in\mathbb{C},\ r\in\mathbb{R}_{>0}$



$$D(z,r):=\{w\in\mathbb{C}\mid |w-z|<r\}$$

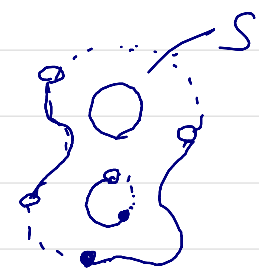
開円板



$$\overline{D(z,r)}:=\{w\in\mathbb{C}\mid |w-z|\le r\}$$

閉円板

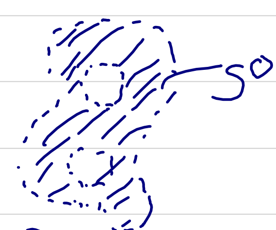
(2) $S\subset\mathbb{C}$



$z\in\mathbb{C}$がSの内点

$:\Longleftrightarrow\ \exists r\in\mathbb{R}_{>0}\quad D(z,r)\subset S$

$S^\circ:=\{z\in\mathbb{C}\mid S$の内点$\}$



必ず $S^\circ\subset S$

(3) $S\subset\mathbb{C}$が開 $:\Longleftrightarrow\ S^\circ=S$

$(\because\ \forall z\in S^\circ\quad z\in D(z,r)\subset S)$

例1.(問1.1.1) 開円板は開集合

§1.2. 複素微分

$U \subset \mathbb{C}$: 開　　$f : U \to \mathbb{C}$ ← U上のC値関数

f が $z \in U$ で正則 $:\Longleftrightarrow \exists \lim_{h \to 0} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$

← $z+h \in D(z,r) \subset U$

特に $h \in \mathbb{C}$

この時 $f'(z) := \lim_{h\to 0} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$

例 **Eg. 1.2.1**

(1) $f(z) =$ (zの多項式) は $\mathbb{C}$上正則

(2) $f(z) =$ (zの有理式) $= P(z)/Q(z)$

は $\mathbb{C} \setminus \{Q$の零点$\}$ 上正則

$\quad \|$

$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) \neq 0\}$

(3) $f(z) = \bar{z}$ は $\mathbb{C}$のどの点でも正則でない

∵ (問1.2.2.)

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h}-\bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

$h \in \mathbb{R}$ なら $\bar{h}/h = h/h = 1 \xrightarrow{h\to 0} 1$

$h \in i\mathbb{R}$ なら $\bar{h}/h = -h/h = -1 \xrightarrow{h \to 0} -1$

よって $\nexists \lim_{h\to 0} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$

命題 (proposition) **Prop. 1.2.2.**

f, g : U上正則

(1) $(f+g)' = f' + g'$

$(cf)' = cf'$

$(c \in \mathbb{C})$

(2) $(fg)' = f'g + fg'$ (ライプニッツ Leibniz則)

特に $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$

コーシー　リーマン
§1.3. Cauchy-Riemann方程式

定理(theorem)

Thm.1.3.1. $U \subset \mathbb{C}$ 開

(1) $f : U \to \mathbb{C}$.

$z = x + iy$. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$: 実部と虚部への分解.

$z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ で f が正則

$\partial_x u = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_x u(x_0,y_0) = \partial_y v(x,y) \\ \partial_x v(x_0,y_0) = -\partial_y u(x_0,y_0) \end{cases} \quad \text{(CR方程式)}$$

(2) $u : U \to \mathbb{R}$. $v : U \to \mathbb{R}$

$\begin{cases} z_0 \text{で 連続微分可能} & (u', v' \text{が存在し、連続}) \\ \quad \text{〃} \quad \text{CR方程式をみたす} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $f := u + iv$ は z_0 で正則. //

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{正則微分} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{反正則微分} \quad \partial_z f := \frac{\partial f}{\partial z} \quad \partial_{\bar{z}} f := \partial f / \partial \bar{z}$$

Prop.1.3.2. $U \subset \mathbb{C}$ 開. $f : U \to \mathbb{C}$

(1) f が $z_0 \in U$ で正則 $\Leftrightarrow$ $\partial_{\bar{z}} f(z_0) = 0$

(2) 〃 〃 ならば $\partial_z f(z_0) = f'(z_0)$

Eg.1.2.1.(3) $f(z) = \bar{z}$ は正則でない

$\because$ $\partial_{\bar{z}} f(z) = \frac{1}{2}\left(\partial_x (x - iy) - \frac{1}{i}\partial_y (x - iy)\right)$

$= \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \neq 0$ //

§1.4. 巾級数と正則函数

テーマ：巾級数は正則函数．（収束半径内で）

Thm.1.4.1. $\forall a(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(a_n\in\mathbb{C})$ $\exists! R\in[0,+\infty]$ 一意存在

s.t. (1) $|z|<R \Rightarrow a(z)$は絶対収束 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n z^n|$が収束

(2) $|z|>R \Rightarrow a(z)$は収束しない

R：$a(z)$の収束半径．//

Thm.1.4.2. $a(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(a_n\in\mathbb{C})$

$R:=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ が $[0,+\infty]$ で存在

+∞に発散する場合

$\Rightarrow$ $a(z)$の収束半径はR．//

E.g.1.4.3. $\exp(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n!}{1/(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$$

収束半径は$+\infty$．

つまり $\forall z\in\mathbb{C}$ に対して $\exp(z)\in\mathbb{C}$が定まる．

Thm.1.4.8. $a(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(a_n\in\mathbb{C})$

は収束半径内で正則．更に

$a'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ //

Thm.1.4.9. $a(z)$は収束半径内で任意回微分可能 //

§1.5 初等函数

$$e^z := \exp(z) = \sum \frac{1}{n!} z^n$$

三角函数

$$\cos z := (e^{iz} + e^{-iz})/2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\sin z := (e^{iz} - e^{-iz})/2i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

($\because e^{iz} = \cos z + i \sin z$)

$$\tan z := \sin z / \cos z \qquad \cot z := \cos z / \sin z$$

双曲線函数

$$\cosh z := (e^z + e^{-z})/2 = \sum \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\sinh z := (e^z - e^{-z})/2 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\tanh z := \sinh z / \cosh z \qquad \coth z := \cosh z / \sinh z$$

fの逆函数 g : $f(g(z)) = z$, $g(f(z)) = z$ となるもののこと.

E.g. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. $f(z) = z^n$ の逆函数 $z^{1/n}$

$$z = re^{i\theta} \qquad 0 < r, \ -\pi < \theta \leq \pi$$

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta/n + 2\pi k/n)}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

値に nコの候補がある. (n価函数)

→ 函数とするには1つを指定する. (分枝を取る)

$\exp(z)$の逆函数 $\log z$:

$$z = re^{i\theta}$$

$$\log z = \log r + i(\theta + 2\pi k) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

値は可算無限コ (無限多価函数)

定義 (definition)

Dfn.1.52. $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し

$$z = re^{i\theta}, \quad 0 < r, \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

なる (r, θ) が一意に定まる.

$$\mathrm{Log}\, z := \log r + i\theta$$

：対数の主値

Prop.1.53. $\mathrm{Log}\, z$ は

$$D := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$$

上の正則関数で 更に $|z| < 1$ なら

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n \times z^n$$

§2 複素積分

§2.2.

<u>Dfn.</u> $C \subset \mathbb{C}$: 滑らかな曲線

f : C上連続函数

(つまり $C \subset U$ なる開集合上の函数)

$$\int_C f(z)\,dz := \int_a^b f(p(t))\,p'(t)\,dt$$

但し $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$: Cのパラメータ表示 //

これは well-defined. つまり、パラメータ p の取り方によらない。

Eg. (問2.2.1) $n \in \mathbb{Z}$, C : 原点中心、半径r、正向きの円

反時計回り

$$\int_C z^n\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \cdot (ire^{it})\,dt \qquad \begin{array}{l} p : [0,2\pi] \to \mathbb{C} \\ p(t) = re^{it} \end{array}$$

$$= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt$$

$n+1 \neq 0$ なら

$$= ir^{n+1} \times \frac{1}{(n+1)i} \left[e^{i(n+1)t} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$n+1 = 0$ なら

$$= i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$