

量子可積分系と対称関数

非線形数理若手の会 2010 年 11 月 15 日 *

柳田伸太郎 †

神戸大学 理学研究科 数学専攻 博士後期課程 2 年

概要

可積分系の重要な概念の 1 つに, 系の対称性を記述する代数構造があります. 今回はこの代数的な立場から量子可積分系の議論を紹介します.

まず, 共形場理論とその対称性を記述する Virasoro 代数から話を始めます. そこでは Jack 対称関数が重要な役割を果たします.

次に, その議論を拡張する形で, Macdonald 対称関数と変型 W 代数を紹介します.

最後に, 変型 W 代数を統制する Ding-Iohara 代数を紹介します. そこにはソリトン方程式やモジュライ空間, 楕円曲線上の Hall 代数などが現れます.

最後の内容は B. Feigin, 橋爪清史, 星野歩, 柴原淳, 白石潤一各氏との共同研究 [FHHSY09], [FHSSY10] に基づきます.

* 2016 年 7 月 5 日改訂. ミスプリントや誤りをご指摘下さった米澤康好氏に感謝致します.

† yanagida@math.kobe-u.ac.jp, 日本学術振興会特別研究員 (DC1)

目次

1	量子力学系から対称多項式へ	3
1.1	円周上の自由電子	3
1.2	分割と Young 図形	5
1.3	Schur 対称多項式	6
1.4	対称関数	8
1.5	対称関数環上の内積と Schur 対称関数	9
1.6	この節のまとめ	12
2	Jack 対称関数と Virasoro 代数	13
2.1	Jack 対称関数	13
2.2	Calogero-Sutherland 模型と Jack 対称多項式	15
2.3	Virasoro 代数	17
2.3.1	Virasoro 代数の定義と Verma 加群	17
2.3.2	特異ベクトル	18
2.3.3	自由場表示と特異ベクトルの明示化	22
2.4	W 代数	25
2.5	この節のまとめ	27
3	Macdonald 対称関数	28
3.1	対称関数環上の変形内積と Macdonald 対称関数 $P_\lambda^{(q,t)}$	28
3.2	変形 Virasoro 代数の特異ベクトル	29
3.2.1	変形 Virasoro 代数の自由場表示	30
3.3	Macdonald 対称多項式	32
3.4	対称関数環上の差分作用素族	34
3.5	Macdonald 差分作用素の自由場表示	34
3.5.1	自由場表示	35
3.5.2	差分作用素族の代数構造に向けて	36
3.6	退化 \mathbb{CP}^1 上の Feigin-Odesskii 代数 \mathcal{A}	37
3.6.1	\mathcal{A} の定義	37
3.6.2	Shuffle 積と \mathcal{A} の構造定理	38
3.6.3	Gordon フィルトレーション	39
3.7	交叉空間と自由場表示	41
3.7.1	交叉空間	41
3.7.2	自由場表示と代数 \mathcal{A}	41
3.8	この節のまとめ	43
4	Ding-Iohara 代数とその変形 W 代数との関係	44
4.1	Ding-Iohara 代数 $\mathcal{U}_{q,t}(\mathfrak{sl}_2)$ の定義	44
4.2	テンソル表現と変形 W 代数	45
4.3	他の分野との関連	47
4.4	この節のまとめ	48

1 量子力学系から対称多項式へ

この節の目的は Schur 関数の導入です. 話のタイトルに “量子可積分系” が含まれることもあって, 自由電子系の波動関数から話を始めることにします. これらの話題の参考書は数多くあるのですが, 後の話の都合もあって, ここでは [S03] のみ引用しておきます.

1.1 円周上の自由電子

単位円周上の N 体自由電子の運動を考えましょう.

$$P := -\sqrt{-1} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad H := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}$$

で運動量演算子とエネルギー演算子が与えられます. ここで q_i は単位円周上の座標です. この運動は相互作用がないので 1 体の問題に帰着されます. 1 体の演算子

$$P_i := -\sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad H_i := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}$$

の対角化

$$P_i \psi(q_i) = p_i \psi(q_i), \quad H_i \psi(q_i) = h_i \psi(q_i), \quad p_i, h_i \in \mathbb{C}$$

を, 周期境界条件

$$\psi(q_i + 2\pi) = (-1)^{N-1} \psi(q_i)$$

の元で行うと, 固有状態は次のように与えられます:

$$\psi(q_i) = x_i^k, \quad x_i := e^{\sqrt{-1}q_i}$$
$$P_i x_i^k = k x_i^k, \quad H_i x_i^k = \frac{k^2}{2} x_i^k, \quad \text{但し } k \in \begin{cases} \mathbb{Z} & N \text{ は奇数,} \\ \mathbb{Z} + \frac{1}{2} & N \text{ は偶数.} \end{cases}$$

N 体電子の波動関数は 1 体波動関数の重ね合わせで作れますが, 電子がフェルミオンであることに注意すると,

- 波数 (運動量) を入れ替えても状態は区別しない
- 粒子の入れ替えに関する反対称性

が (物理的に) 必要です.

そこで

$$k := (k_1, k_2, \dots, k_N), \quad k_1 > k_2 > \dots > k_N \quad (1.1)$$

に対して

$$\psi_k(q_1, q_2, \dots, q_N) := \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} x_1^{k_1} & x_1^{k_2} & \dots & x_1^{k_N} \\ x_2^{k_1} & x_2^{k_2} & \dots & x_2^{k_N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_N^{k_1} & x_N^{k_2} & \dots & x_N^{k_N} \end{vmatrix}$$

とすれば*1, これはフェルミオニックな統計性

$$\psi_k(q_1, \dots, q_i, \dots, q_j, \dots, q_N) = -\psi_k(q_1, \dots, q_j, \dots, q_i, \dots, q_N).$$

をもち, 運動量とエネルギーは以下で与えられます:

$$P\psi_k = \psi_k \cdot \sum_{i=1}^N k_i, \quad H\psi_k = \psi_k \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i^2.$$

基底状態, 即ち固有状態 ψ_k のうち一番エネルギーが低い状態は,

$$k_1 = \frac{N-1}{2}, \quad k_2 = \frac{N-3}{2}, \dots, k_i = \frac{N+1-2i}{2}, \dots, k_N = -\frac{N-1}{2} \quad (1.2)$$

で与えられます.

固有状態の波数 (1.1) は分割を用いると簡単に表すことができます. 整数 l と非負整数の非増加列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N = 0)$, 即ち

$$l \in \mathbb{Z}, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N = 0$$

に対し

$$(l, \lambda) \mapsto k(l, \lambda) := \left(\lambda_i + l + \frac{N+1}{2} - i \right)_{1 \leq i \leq N}$$

とすると, この対応で以下の全単射が作れます:

$$\left\{ (l, \lambda) \left| \begin{array}{l} l \in \mathbb{Z}, \\ \lambda = (\lambda_i)_{i=1}^N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N, \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N = 0 \end{array} \right. \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ k = (k_i)_{i=1}^N \left| \begin{array}{l} k_1 > k_2 > \dots > k_N, \\ k_i \in \begin{cases} \mathbb{Z} & N \text{ が奇数} \\ \mathbb{Z} + 1/2 & N \text{ が偶数} \end{cases} \end{array} \right. \right\}. \quad (1.3)$$

*1 多体フェルミオン系の波動関数を行列式を表す時, 物理や化学では Slater 行列と言うのだと思います.

この対応で基底状態の波数 (1.2) は $l = 0, \lambda = (0, 0, \dots, 0) = (0^N)$ に対応します. すると波動関数 $|0\rangle = \psi_{k(0, (0^N))}$ は

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^{-(N-1)/2} \begin{vmatrix} x_1^{N-1} & x_1^{N-2} & \cdots & x_1^0 \\ x_2^{N-1} & x_2^{N-2} & \cdots & x_2^0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_N^{N-1} & x_N^{N-2} & \cdots & x_N^0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^{-(N-1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j) \end{aligned}$$

と差積で書けます. 一般の波数 $k(l, \lambda)$ に対しては

$$\psi_{k(l, \lambda)} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^{l-(N-1)/2} \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+N-1} & x_1^{\lambda_2+N-2} & \cdots & x_1^{\lambda_N} \\ x_2^{\lambda_1+N-1} & x_2^{\lambda_2+N-2} & \cdots & x_2^{\lambda_N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_N^{\lambda_1+N-1} & x_N^{\lambda_2+N-2} & \cdots & x_N^{\lambda_N} \end{vmatrix}$$

となります. そこで分割 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ に対して

$$a_\mu(x) := \begin{vmatrix} x_1^{\mu_1} & x_1^{\mu_2} & \cdots & x_1^{\mu_N} \\ x_2^{\mu_1} & x_2^{\mu_2} & \cdots & x_2^{\mu_N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_N^{\mu_1} & x_N^{\mu_2} & \cdots & x_N^{\mu_N} \end{vmatrix}$$

と定め, 数列

$$\delta := (N-1, N-2, \dots, 1, 0) \in \mathbb{Z}^N$$

と分割 λ の足し算 $\lambda + \delta = (\lambda_1 + N - 1, \lambda_2 + N - 2, \dots, \lambda_N)$ を考えると, 一般の波動関数 ψ_k は次のように書けます:

$$\psi_k = \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^l s_\lambda(x) |0\rangle, \quad s_\lambda(x) := \frac{a_{\delta+\lambda}(x)}{a_\delta(x)}.$$

1.2 分割と Young 図形

対応 (1.3) において分割が現れたので, ここで少し記号を整理しておきます.

非負整数 n の分割とは, 非増加自然数列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ であって $\sum_i \lambda_i = n$ となるもののことです. 例えば 6 以下の自然数の分割を列挙してみると次のようになります:

$$1 \text{ の分割 : } (1), \quad 2 \text{ の分割 : } (2), (1, 1) = (1^2), \quad 3 \text{ の分割 : } (3), (2, 1), (1^3),$$

4 の分割 : $(4), (3, 1), (2^2), (2, 1^2), (1^4),$

5 の分割 : $(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1^2), (2^2, 1), (2, 1^3), (1^5),$

6 の分割 : $(6), (5, 1), (4, 2), (4, 1^2), (3^2), (3, 2, 1), (3, 1^3), (2^3), (2^2, 1^2), (2, 1^4), (1^6).$

分割を図示するのに便利なのが Young 図形です. 今回の話ではイギリス流の Young 図形の書き方を uses (図 1).

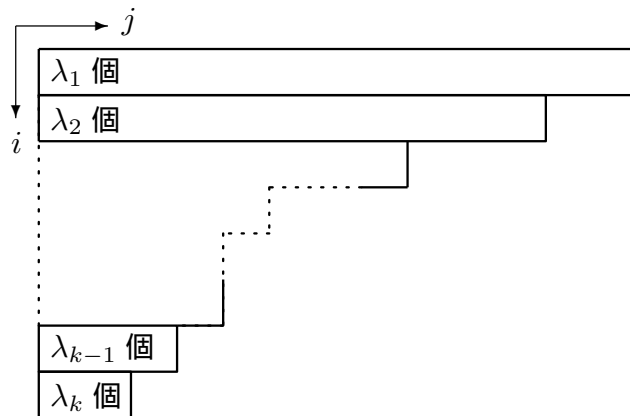


図 1 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ に対応する Young 図形

分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ に対して $|\lambda| := \sum_i \lambda_i$ と書きます. また λ の長さを $\ell(\lambda)$ で表します. n の分割全体の集合を \mathcal{P}_n , それらの合併を \mathcal{P} と書きます. $p(n) := \#\mathcal{P}_n$ は分割数と呼ばれます.

有限変数の対称多項式を書く際には, “要素に 0 が含まれている分割” があると便利です. そこで, 長さ N の非増加非負整数列全体を $\tilde{\mathcal{P}}^{(N)}$ と書くことにします. その元 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \tilde{\mathcal{P}}^{(N)}$ に対しても, $|\lambda| := \sum_i \lambda_i$ と書き, また $\lambda_k \neq 0$ なる最大の k を $\ell(\lambda)$ と書きます. $\tilde{\mathcal{P}}_n^{(N)} := \{\lambda \in \tilde{\mathcal{P}}^{(N)} \mid |\lambda| = n\}$ と定義します.

1.3 Schur 対称多項式

定義 1.1. (1) $\mu \in \tilde{\mathcal{P}}^{(N)}$ について N 変数交代多項式 $a_\mu^{(N)}(x)$ を次式で定義する:

$$a_\mu^{(N)}(x) := \begin{vmatrix} x_1^{\mu_1} & x_1^{\mu_2} & \cdots & x_1^{\mu_N} \\ x_2^{\mu_1} & x_2^{\mu_2} & \cdots & x_2^{\mu_N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_N^{\mu_1} & x_N^{\mu_2} & \cdots & x_N^{\mu_N} \end{vmatrix}.$$

(2) 長さ N 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ について

$$s_\lambda^{(N)}(x) := \frac{a_{\delta+\lambda}^{(N)}(x)}{a_\delta^{(N)}(x)}, \quad \text{但し } \delta + \lambda := (\lambda_1 + N - 1, \lambda_2 + N - 2, \dots, \lambda_N),$$

で定義される $s_\lambda^{(N)}$ は N 変数対称多項式である. これを Schur 対称多項式と呼ぶ. \square

以下では対称多項式の空間を

$$\begin{aligned} \Lambda^{(N)} &:= \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} f(x_1, \dots, x_N) \\ \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_N] \end{array} \middle| \begin{array}{l} f(x_1, \dots, x_N) \\ = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(N)}) \end{array} \forall \sigma \in \mathfrak{S}_N \right\} \end{aligned}$$

と書きます. その d 次斉次成分を

$$\Lambda_d^{(N)} := \{ f(x) \in \Lambda^{(N)} \mid f \text{ の次数は } d \}$$

と書きます. 係数拡大は以下のように表します:

$$\Lambda_K^{(N)} := \Lambda^{(N)} \otimes_{\mathbb{Z}} K = K[x_1, x_2, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}, \quad \Lambda_{d,K}^{(N)} := \Lambda_d^{(N)} \otimes_{\mathbb{Z}} K$$

対称多項式の空間 $\Lambda^{(N)}$ には様々な基底があることが知られています. それらは $\tilde{\mathcal{P}}^{(N)}$ で自然にパラメトライズされます.

対称群の作用から自然に構成されるのが,

$$m_\lambda^{(N)}(x) := \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N): \\ \lambda \in \tilde{\mathcal{P}}^{(N)} \text{ の異なる置換}}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_N^{\alpha_N}$$

で定義されるモノミアル対称多項式です. 一方で

$$e_\lambda^{(N)}(x) := e_{\lambda_1}^{(N)}(x) e_{\lambda_2}^{(N)}(x) \cdots e_{\lambda_N}^{(N)}(x), \quad e_r^{(N)}(x) := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq N} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \quad (1.4)$$

と定義される基本対称多項式も古くから知られています.

事実 1.2. モノミアル対称多項式, 基本対称多項式, Schur 対称多項式は対称多項式の空間の基底となる. 正確に述べると, $N \geq d$ の時,

$$\begin{aligned} \Lambda_d^{(N)} &= \bigoplus_{\lambda \in \tilde{\mathcal{P}}_d^{(N)}} \mathbb{Z} m_\lambda^{(N)}(x) = \bigoplus_{\lambda \in \tilde{\mathcal{P}}_d^{(N)}} \mathbb{Z} e_\lambda^{(N)}(x) \\ &= \bigoplus_{\lambda \in \tilde{\mathcal{P}}_d^{(N)}} \mathbb{Z} s_\lambda^{(N)}(x). \end{aligned} \quad \square$$

後々の為に、もう一つの種類の対称多項式を紹介します。 N 変数の冪和対称多項式を

$$p_r^{(N)}(x) := \sum_{i=1}^N x_i^r, \quad p_\lambda^{(N)} := p_{\lambda_1}^{(N)}(x) \cdot p_{\lambda_2}^{(N)}(x) \cdots p_{\lambda_N}^{(N)}(x)$$

で定義します。これは $\Lambda_{\mathbb{Q}}^{(N)}$ の \mathbb{Q} 基底です：

$$\Lambda_{d,\mathbb{Q}}^{(N)} = \bigoplus_{\lambda \in \tilde{P}_d^{(N)}} \mathbb{Q} p_\lambda^{(N)}(x). \quad (1.5)$$

例 1.3. 事実 1.2 と (1.5) から、Schur 対称多項式を冪和対称多項式の線型結合で表わせませす。具体的に見てみると

$$\begin{aligned} s_{(1)}^{(1)} &= p_1^{(1)}, \\ s_{(2)}^{(2)} &= \frac{1}{2}p_2^{(2)} + \frac{1}{2}p_{(1^2)}^{(2)}, \quad s_{(1^2)}^{(2)} = -\frac{1}{2}p_2^{(2)} + \frac{1}{2}p_{(1^2)}^{(2)}, \\ s_{(3)}^{(3)} &= \frac{1}{3}p_3^{(3)} + \frac{1}{2}p_{(2,1)}^{(3)} + \frac{1}{6}p_{(1^3)}^{(3)}, \quad s_{(2,1)}^{(3)} = -\frac{1}{3}p_3^{(3)} + \frac{1}{3}p_{(1^3)}^{(3)}, \\ s_{(1^3)}^{(3)} &= \frac{1}{3}p_3^{(3)} - \frac{1}{2}p_{(2,1)}^{(3)} + \frac{1}{6}p_{(1^3)}^{(3)}. \quad \square \end{aligned}$$

1.4 対称関数

自由電子の N 体問題を考えることで対称多項式が現れることを見てきました。以下では無限個の変数を持つ対称関数を扱いたいと思います

今回の話では次の流儀で定義される対称関数を考えます*2。

定義 1.4. 対称多項式のなす加群上の制限写像 $\rho_{N,M}$ を

$$\begin{aligned} \rho_{N,M} : \quad \Lambda^{(N)} &\rightarrow \Lambda^{(M)} \\ f(x_1, \dots, x_N) &\mapsto f(x_1, \dots, x_M, 0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (1.6)$$

で定めると、 $(\{\Lambda^{(N)}\}_N, \{\rho_{N,M}\}_{N,M})$ は加群の射影系になる。そこでその射影極限を

$$\Lambda := \varprojlim_N \Lambda^{(N)}$$

と書く。誘導される自然な射影写像を $\rho_N : \Lambda \rightarrow \Lambda^{(N)}$ と書く。 □

*2 これは [Mac95, §1.2] で使われているものなので、Macdonald 流の対称関数と呼ぶ人もいます。この流儀の対称関数は、実は幾何学の不変量 (Chern 類, Todd 類など) の定義にも表れます。対称関数の流儀には別のものもあって、例えば Olshansky 流の定義と呼ばれるものもあります。

制限写像は $\Lambda^{(N)}$ の次数構造 $\Lambda^{(N)} = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Lambda_d^{(N)}$ を保つので、射影極限 Λ も次数構造 $\Lambda = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Lambda_d$ を持ちます。 Λ_d は “ d 次斉次対称関数” の空間に他なりません。 また、以下では Λ の係数拡大を $\Lambda_K = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} K$ の様に下添え字で表します。

対称多項式の空間 $\Lambda^{(N)}$ に様々な基底があったように、 Λ にも様々な基底があります。 例えば以下のようなものがあります。

$$\begin{aligned}
 & \bullet m_\lambda := \sum_{\alpha: \text{異なる } \lambda \text{ の置換}} x^\alpha : \text{モノミアル対称関数} \\
 & \bullet e_r := \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}, \quad e_\lambda(x) := e_{\lambda_1}(x) e_{\lambda_2}(x) \cdots e_{\lambda_k}(x) : \text{基本対称関数}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

この時 $\{m_\lambda(x) \mid \lambda: \text{分割}\}$ 及び $\{e_\lambda(x) \mid \lambda: \text{分割}\}$ は Λ の \mathbb{Z} 基底である。

この2つの他にも、次の冪和対称関数は大切な対象です：

$$p_r := \sum_i x_i^r, \quad p_\lambda := p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_k}.$$

$\{p_\lambda \mid \lambda: \text{分割}\}$ は $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ の \mathbb{Q} 基底です。

例 1.5. 対称関数を具体的に書き出してみると

$$\begin{aligned}
 p_1 &= e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots, & p_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots, \\
 e_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \cdots, & e_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + \cdots.
 \end{aligned} \quad \square$$

対称関数の空間 Λ は (関数の自然な) 掛け算に関して閉じているので、以後 Λ のことを対称関数環と呼ぶことにします。

1.5 対称関数環上の内積と Schur 対称関数

有限変数の Schur 対称多項式 $s_\lambda^{(N)}(x)$ の無限変数版を考えたいのですが、定義 1.1 の様に行列式の比として導入するのは少し無理があります。ここでは直交関数系として Schur 対称関数を導入します。冪和対称関数が $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ の基底となっていることを思い出しましょう。

定義 1.6. (1) 分割 λ に対し整数 z_λ を次式で定義する：

$$z_\lambda := \prod_{j \geq 1} m_j(\lambda)! j^{m_j(\lambda)}, \quad m_j(\lambda) := \#\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid \lambda_i = j\}. \tag{1.8}$$

(2) 対称関数環 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を次式で定義する：

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle := z_\lambda \delta_{\lambda, \mu}. \tag{1.9}$$

□

例 1.7. z_λ を計算してみましょう. $n_1 > n_2 > \dots$ とすると

$$z_{(n)} = n, \quad z_{(n^m)} = m! n^m, \quad z_{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \prod_{i=1}^k n_i,$$

$$z_{(n_1^{m_1}, n_2^{m_2}, \dots, n_k^{m_k})} = \prod_{i=1}^k m_i! n_i^{m_i}. \quad \square$$

事実&定義 1.8. 任意の分割 λ に対し Schur 対称関数 $s_\lambda \in \Lambda_{\mathbb{Q}}$ が次の 2 条件

$$\bullet \quad s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} c_{\lambda, \mu} m_\mu \quad (c_{\lambda, \mu} \in \mathbb{Q}), \quad (1.10)$$

$$\bullet \quad \langle s_\lambda, s_\mu \rangle = 0 \quad \text{for } \mu \neq \lambda$$

で一意に決定される. □

但し (1.10) の中で, 次のドミナンス半順序 $>$ を用いました*3:

定義 1.9. 分割 λ, μ に対し

$$\lambda \geq \mu \stackrel{\text{def}}{\iff} |\lambda| = |\mu| \text{ かつ } \sum_{k=1}^i \lambda_k \geq \sum_{k=1}^i \mu_k \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (1.11)$$

□

例 1.10. $n \geq 5$ なら \mathcal{P}_n 上のドミナンス半順序は全順序になります:

$$\begin{aligned} (2) &> (1, 1), \\ (3) &> (2, 1) > (1, 1, 1), \\ (4) &> (3, 1) > (2, 2) > (2, 1, 1) > (1, 1, 1, 1), \\ (5) &> (4, 1) > (3, 2) > (3, 1^2) > (2^2, 1) > (2, 1^3) > (1^5). \end{aligned}$$

しかし 6 の分割になると真に半順序になります:

$$(6) > (5, 1) > (4, 2) > (4, 1^2) > (3, 2, 1) > (3, 1^3) > (2^2, 1^2) > (2, 1^4) > (1^6). \quad \square$$

$$ > (3^2) > > (2^3) > $$

7 と 8 の分割をドミナンス半順序にならべたものを下図 2 に示しました.

*3 今回の話に現れる, 分割の集合上の順序はこのドミナンス半順序だけです. ここでは組み合わせ論的な見方しかしていないのですが, 実はこの半順序は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の冪零軌道の包含関係などに現れます.

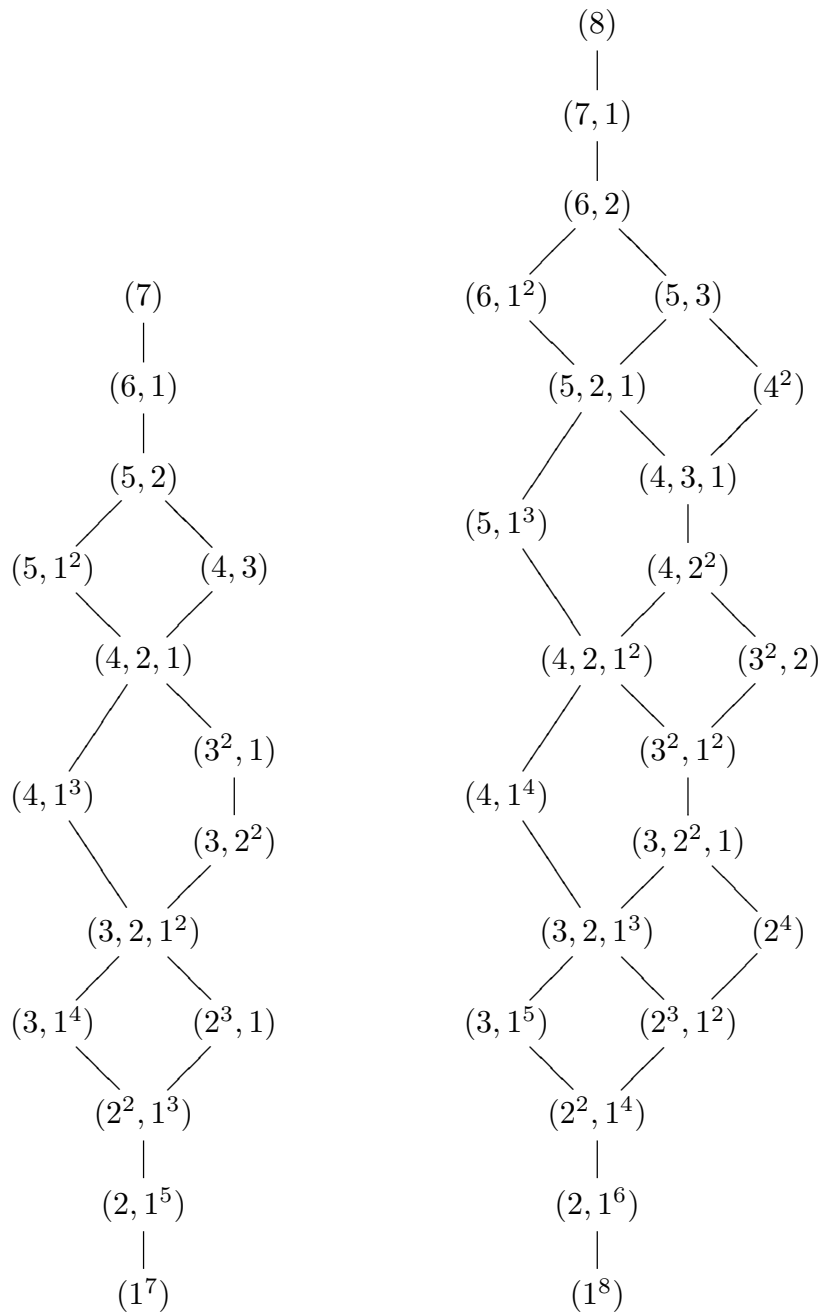


図2 7と8の分割のドミナンス半順序に関する Hasse 図

例 1.11. 定義から Schur 対称関数をモノミアル対称関数の線型結合として求めましょう:

(1) 1 の分割は (1) だけで, この時は何もすることはなく $s_{(1)} = m_{(1)}$.

(2) 2 の分割について, 取り敢えず

$$s_{(1^2)} = m_{(1^2)} = -\frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1^2, \quad s_{(2)} = m_{(2)} + um_{(1^2)} = \left(1 - \frac{u}{2}\right) + \frac{u}{2}p_1^2$$

と置けます. 直交性から

$$0 = \langle s_{(1^2)}, s_{(2)} \rangle = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{u}{2}\right) \langle p_2, p_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle p_1^2, p_1^2 \rangle = -1 + u$$

となるので $u = 1$ で

$$s_{(1^2)} = m_{(1^2)} = -\frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1^2, \quad s_{(2)} = m_{(2)} + m_{(1^2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_1^2$$

(3) 同様にして

$$\begin{aligned} s_{(1^3)} &= m_{(1^3)} &&= \frac{1}{3}p_3 - \frac{1}{2}p_2p_1 + \frac{1}{6}p_1^3. \\ s_{(2,1)} &= m_{(2,1)} + 2m_{(1^3)} &&= -\frac{1}{3}p_3 + \frac{1}{3}p_1^3, \\ s_{(3)} &= m_{(3)} + m_{(2,1)} + m_{(1^3)} &&= \frac{1}{3}p_3 + \frac{1}{2}p_2p_1 + \frac{1}{6}p_1^3. \end{aligned}$$

冪和対称関数での展開は有限変数での結果 (例 1.3) と一致しています. □

1.6 この節のまとめ

- この節では自由電子の量子系から出発して Schur 対称多項式並びに Schur 対称関数を導入しました.
- 対称関数の方は, 対称関数環という無限次元線形空間の上のある内積に関する直交関数系として定義できることも見ました.

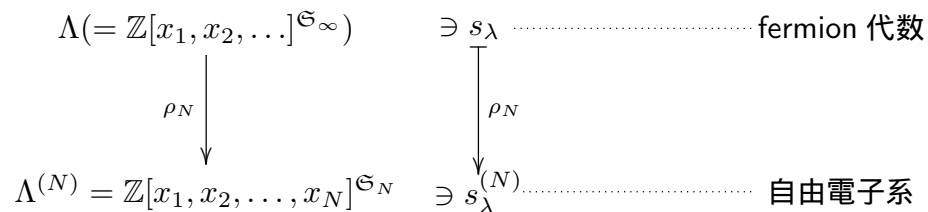


図 3 §1 のまとめ

2 Jack 対称関数と Virasoro 代数

前節では Schur 対称関数を対称関数環の直交基底として定義しました. この節では直交基底にパラメータ β を加えて変形することで Jack 対称関数を導入します. 次に Virasoro 代数という無限次元 Lie 代数を導入し, その特異ベクトルの自由場表示に Jack 対称関数が現れることを観察します. この節の参考書は前節同様 [S03] です.

2.1 Jack 対称関数

1 変数有理関数体 $\mathbb{Q}(\beta)$ を考えます.

事実&定義 2.1. (1) 対称関数環 $\Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta$ を次式で定義する:

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\beta := \delta_{\lambda, \mu} z_\lambda \beta^{-\ell(\lambda)}. \quad (2.1)$$

(2) 任意の分割 λ に対し Jack 対称関数 $P_\lambda^{(\beta)} \in \Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}$ が次の 2 条件で一意に決まる:

- $P_\lambda^{(\beta)} = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} c_{\lambda, \mu}(\beta) m_\mu \quad (c_{\lambda, \mu}(\beta) \in \mathbb{Q}(\beta)),$
- $\langle P_\lambda^{(\beta)}, P_\mu^{(\beta)} \rangle_\beta = 0 \quad \text{for } \mu \neq \lambda. \quad \square$

例 2.2. Schur 対称関数の時と同様に, 対角化で Jack 対称関数を小さい分割から順に求めることができます. それを実行すると以下の様になります.

$$\begin{aligned} P_{(1)}^{(\beta)} &= p_1, \\ P_{(2)}^{(\beta)} &= \frac{1}{1+\beta} p_2 + \frac{\beta}{1+\beta} p_1^2, & P_{(1^2)}^{(\beta)} &= -\frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{2} p_1^2, \\ P_{(3)}^{(\beta)} &= \frac{2}{(1+\beta)(2+\beta)} p_3 + \frac{3\beta}{(1+\beta)(2+\beta)} p_2 p_1 + \frac{\beta^2}{(1+\beta)(2+\beta)} p_1^3, \\ P_{(2,1)}^{(\beta)} &= -\frac{1}{1+2\beta} p_3 + \frac{1-\beta}{1+2\beta} p_2 p_1 + \frac{\beta}{1+2\beta} p_1^3, \\ P_{(1^3)}^{(\beta)} &= \frac{1}{3} p_3 - \frac{1}{2} p_2 p_1 + \frac{1}{6} p_1^3. \end{aligned}$$

内積 (2.1) と Schur 対称関数で用いた内積 (1.9) を比較すると次の関係が得られます:

$$P_\lambda^{(\beta)} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} s_\lambda.$$

この関係は上記の計算例と Schur 対称関数の例 1.11 にも見出せます. □

Jack 対称関数の例を見ると係数の有理式, 特に分母の式がある程度統制できそうです. 実際, 以下の様な “分母を払った” Jack 対称関数が定義出来ます.

定義 2.3. integral Jack 対称関数^{*4} $J_\lambda^{(\beta)} \in \Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}$ を次式で定義する:

$$J_\lambda^{(\beta)} := P_\lambda^{(\beta)} \cdot \prod_{\square \in \lambda} (\beta^{-1} a_\lambda(\square) + \ell_\lambda(\square) + 1). \quad \square$$

ここで Young 図形にまつわる記号を用いました.

定義 2.4. (0) 分割 λ の Young 図形を転置した図形に対応する分割を λ^\vee と書く.

(1) $\square := (i, j) \in \mathbb{Z}^2$ と分割 λ に対して arm 及び leg を

$$a_\lambda(\square) := \lambda_i - j, \quad \ell_\lambda(\square) := \lambda_j^\vee - i$$

と定義する. 但し, $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$ でないなら $\lambda_i := 0$, $1 \leq j \leq \ell(\lambda^\vee) = \lambda_1$ でないなら $\lambda_j^\vee := 0$ と約束する.

(2) 分割 λ に対し, $\square \in \lambda$ とは $\square := (i, j) \in \mathbb{Z}^2$ であって $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$ かつ $1 \leq j \leq \lambda_i$ なるもののことである. □

例 2.5. $\lambda = (3, 2, 1, 1)$ について

$$\begin{aligned} \square = (1, 1) \in \lambda: & \quad a_\lambda(\square) = \lambda_1 - 1 = 2, \quad \ell_\lambda(\square) = \lambda_1^\vee - 1 = 3, \\ \blacksquare = (4, 3) \notin \lambda: & \quad a_\lambda(\blacksquare) = \lambda_4 - 3 = -2, \quad \ell_\lambda(\blacksquare) = \lambda_3^\vee - 4 = -3. \end{aligned}$$

となることが分かります (図 4 参照). □

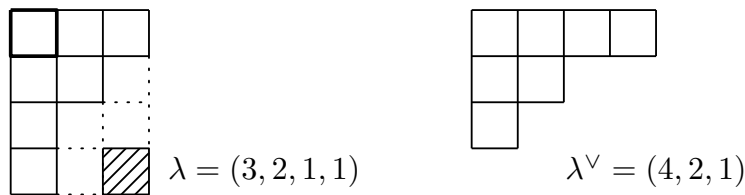


図 4 $\lambda = (3, 2, 1, 1)$ に関する arm と leg

事実 2.6. $J_\lambda^{(\beta)}$ の幂和対称関数に関する展開係数は β^{-1} の整数係数多項式である:

$$J_\lambda^{(\beta)} = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_{|\lambda|}} b_{\lambda, \mu}(\beta) p_\mu, \quad b_{\lambda, \mu} \in \mathbb{Z}[\beta^{-1}] \quad \square$$

^{*4} “integral Jack symmetric function” の邦訳語は無いようですので, ここでは無理に訳すのをやめました.

例 2.7. integral Jack 対称函数を小さい分割について計算すると以下の様になります:

$$J_{(1)}^{(\beta)} = p_1,$$

$$J_{(2)}^{(\beta)} = p_1^2 + \beta^{-1}p_2,$$

$$J_{(1^3)}^{(\beta)} = p_1^3 + 3\beta^{-1}p_2p_1 + 2\beta^{-2}p_3,$$

$$J_{(3)}^{(\beta)} = p_1^3 - 3p_2p_1 + 2p_3,$$

$$J_{(4)}^{(\beta)} = p_1^4 + 6\beta^{-1}p_2p_1^2 + 3\beta^{-1}p_2^2 + 8\beta^{-2}p_3p_1 + 6\beta^{-1}p_4,$$

$$J_{(2^2)}^{(\beta)} = p_1^4 + 2(\beta^{-1} - 1)p_2p_1 + (\beta^{-2} + \beta^{-1} + 1)p_2^2 - 4\beta^{-1}p_3p_1 - \beta^{-1}(\beta^{-1} - 1)p_4,$$

$$J_{(1^4)}^{(\beta)} = p_1^4 - 6p_2p_1^2 + 3p_2^2 + 8p_3p_1 - 6p_4. \quad \square$$

2.2 Calogero-Sutherland 模型と Jack 対称多項式

前副節では Jack 対称函数 $P_\lambda^{(\beta)}$ を幾分天下りに定義しましたが, $P_\lambda^{(\beta)}$ は元来有限変数の Jack 対称多項式 $P_\lambda^{(N)}(x; \beta)$ の無限変数版として導入されました. $P_\lambda^{(N)}(x; \beta)$ は Calogero-Sutherland 模型の固有関数として発見されました. その概要を紹介しましょう.

Calogero-Sutherland 模型は単位円周上の N 個の量子力学的粒子に \sin^{-2} 型の相互作用のポテンシャルを与えた模型です. 運動量演算子とハミルトニアンは次の様になります:

$$P := \sum_{i=1}^N p_i, \quad H_{CS} := \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}p_i^2 + \beta(\beta - 1) \sum_{i < j} \frac{1}{4 \sin^2[(q_i - q_j)/2]}.$$

ここで $0 \leq q_i \leq 2\pi$ は i 番目の粒子の座標, $p_i = -\sqrt{-1}\partial/\partial q_i$ は i 番目の粒子の運動量です. $\beta(\beta - 1)$ が結合定数ですが, この β は最終的に Jack 対称多項式のパラメータになります. ポテンシャル項は粒子間に直線距離の -1 乗で引力が働くことを意味しています.

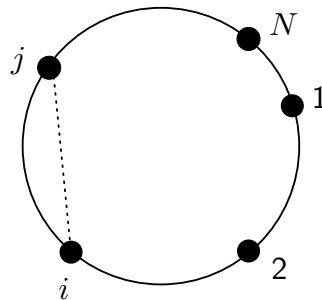


図 5 Calogero-Sutherland 模型のポテンシャルの意味

固有値問題の答えは以下ようになります。

事実 2.8. (1) $q_i = e^{\sqrt{-1}x_i}$ で変数 x_i を導入すると,

$$\begin{aligned}\psi_0 &:= \frac{1}{\sqrt{N!}} (2\sqrt{-1})^{\beta N(N-1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq N} \left(\sin \frac{q_i - q_j}{2} \right)^\beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^{-\beta(N-1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^\beta\end{aligned}$$

は H_{CS} の基底状態であり, そのエネルギー固有値は

$$E_0 = \frac{\beta^2}{4} \frac{(N+1)N(N-1)}{6}.$$

(2) $l \in \mathbb{Z}$ と $\lambda \in \tilde{\mathcal{P}}^{(N)}$ に対して

$$k_i(l, \lambda; \beta) := \lambda_i + l + \beta \left(\frac{N+1}{2} - i \right), \quad k(l, \lambda; \beta) := (k_i(l, \lambda; \beta))_{i=1}^N$$

と定義する. この時任意の $\lambda \in \tilde{\mathcal{P}}^{(N)}$ に関して対称多項式

$$P_\lambda^{(N)}(x; \beta) \in \Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}^{(N)}$$

が定数倍を除いて一意に存在して,

$$\psi_{k(l, \lambda; \beta)} := \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^l P_\lambda^{(N)} \psi_0$$

は以下を満たす:

$$\begin{aligned}P \psi_{k(l, \lambda; \beta)} &= P_{k(l, \lambda; \beta)} \psi_{k(l, \lambda; \beta)}, & P_{k(l, \lambda; \beta)} &:= \sum_{i=1}^N k_i(l, \lambda; \beta), \\ H_{CS} \psi_{k(l, \lambda; \beta)} &= E_{k(l, \lambda; \beta)} \psi_{k(l, \lambda; \beta)}, & E_{k(l, \lambda; \beta)} &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i(l, \lambda; \beta)^2.\end{aligned}$$

即ち $\psi_{k(l, \lambda; \beta)}$ は H_{CS} の励起状態である. □

$P_\lambda^{(N)}(x; \beta)$ が Jack 対称多項式です. その存在定理を改めて書くことにします.

事実 2.9. 任意の $\lambda \in \tilde{\mathcal{P}}^{(N)}$ に対して以下の 2 条件を満たす対称多項式 $P_\lambda^{(N)}(x; \beta) \in \Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}^{(N)}$ が唯一存在する:

$$\bullet P_\lambda^{(N)}(x; \beta) = m_\lambda^{(N)}(x) + \sum_{\mu < \lambda} \tilde{c}_{\lambda, \mu}(\beta) m_\mu^{(N)}(x) \quad (\tilde{c}_{\lambda, \mu}(\beta) \in \mathbb{Q}(\beta)),$$

$$\begin{aligned}
& \bullet H_\beta^{(N)} P_\lambda^{(N)}(x; \beta) = \epsilon_\lambda^{(N)}(\beta) P_\lambda^{(N)}(x; \beta), \\
H_\beta^{(N)} &:= \sum_{i=1}^N \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 + \beta \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \\
\epsilon_\lambda^{(N)}(\beta) &:= \sum_i (\lambda_i^2 + \beta(N+1-2i)\lambda_i). \quad \square
\end{aligned}$$

そして、無限変数への極限に関して、以下の事実が成立します。自然な写像 $\rho_N : \Lambda \rightarrow \Lambda^{(N)}$ (定義 1.4(2)) が $\Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}$ 上に誘導する写像を同じ記号で書きましょう:

$$\rho_N : \Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{Q}(\beta)}^{(N)}.$$

定義 2.10. 任意の $\lambda \in \tilde{\mathcal{P}}^{(N)} \cap \mathcal{P}$ に対し、 $\tilde{\lambda} := (\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}, 0, \dots, 0) \in \tilde{\mathcal{P}}^{(N)}$ とすると、次式が成立する:

$$\rho_N(P_\lambda^{(\beta)}) = P_{\tilde{\lambda}}^{(N)}(x; \beta). \quad \square$$

2.3 Virasoro 代数

以上で Jack 対称関数と量子系の関連が分かりました。ここから先は少し話題を変えて、無限次元代数の表現に対称関数が現れるを見ていきます。

2.3.1 Virasoro 代数の定義と Verma 加群

定義 2.11. Virasoro 代数 Vir は \mathbb{C} 上の無限次元 Lie 代数で、次の様に定義される:

$$\text{生成元: } L_n \ (n \in \mathbb{Z}), \quad C,$$

$$\text{関係式: } [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{C}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}, \quad [L_n, C] = 0. \quad (2.2) \quad \square$$

Vir は三角分解

$$\begin{aligned}
\text{Vir} &= \text{Vir}_+ \oplus \text{Vir}_0 \oplus \text{Vir}_-, \\
\text{Vir}_\pm &:= \bigoplus_{\pm n > 0} \mathbb{C}L_n, \quad \text{Vir}_0 := \mathbb{C}C \oplus \mathbb{C}L_0
\end{aligned}$$

を持ちます。さらに $U(\text{Vir}_-)$ の PBW 基底として以下のようなものが取れます: 自然数 n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ に対して

$$L_{-\lambda} := L_{-\lambda_k} L_{-\lambda_{k-1}} \cdots L_{-\lambda_1}. \quad (2.3)$$

無限次元 Lie 環である Vir の大切な表現に Verma 加群 $M(c, h)$ があります:

定義 2.12. c と h を複素数とする. \mathbb{C} 線型空間として $M(c, h)$ を次式で定める:

$$M(c, h) := \bigoplus_{\lambda: \text{分割}} L_{-\lambda} |c, h\rangle.$$

その上の Vir の作用を次で与えると, $M(c, h)$ は $U(\text{Vir})$ 加群^{*5}として well-defined になる:

$$L_n |c, h\rangle = 0 \quad (n > 0), \quad L_0 |c, h\rangle = h |c, h\rangle \quad C |c, h\rangle = c |c, h\rangle$$

この $M(c, h)$ を Verma 加群と呼ぶ. □

定義関係式 (2.2) の一部 $[L_0, L_{-n}] = nL_{-n}$ より, $M(c, h)$ は L_0 ウェイト分解

$$M(c, h) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M(c, h)_n, \quad M(c, h)_n := \{v \in M(c, h) \mid L_0 v = (h + n)v\}$$

を持つことが分かります. また $M(c, h)_n$ は

$$\{L_{-\lambda} |c, h\rangle \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\},$$

を基底にもつことも直ぐに分かります. 特にその次元は分割数で与えられます:

$$\dim_{\mathbb{C}} M(c, h)_n = p(n).$$

2.3.2 特異ベクトル

定義 2.13. $v \in M(c, h)_n$ は次の条件を満たす時 (レベル n の) 特異ベクトルと呼ばれる:

$$L_k v = 0 \quad \text{for any } k \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{2.4}$$

□

特異ベクトルが存在するには (c, h) は特別な値を取らねばなりません. このことを見るのに Kac 行列式を思い出す必要があります.

定義 2.14. 双対 Verma 加群 $M^*(c, h)$ を,

$$\langle c, h | \text{Vir}_- = 0, \quad \langle c, h | L_0 = h \langle c, h |, \quad \langle c, h | C = c \langle c, h |$$

なる $\langle c, h |$ で生成される右 $U(\text{Vir})$ 加群とする. □

^{*5} U は Lie 環の普遍包絡環のことです.

これは L_0 ウェイト分解

$$\bigoplus_{n \geq 0} M^*(c, h)_n, \quad M^*(c, h)_n := \{v \in M^*(c, h) \mid vL_0 = (h - n)v\}.$$

を持ち, 各ウェイト空間 $M^*(c, h)_n$ は次の基底を持ちます:

$$M^*(c, h)_n = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \mathbb{C} \langle h \mid L_\lambda, \quad L_\lambda := L_{\lambda_1} L_{\lambda_2} \cdots L_{\lambda_k}. \quad (2.5)$$

定義 2.15. Verma 加群と双対 Verma 加群の上の双線形形式

$$\cdot : M^*(c, h) \times M(c, h) \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.6)$$

であって, 次の性質をもつものを Shapovalov 形式と呼ぶ:

$$\begin{aligned} \langle h \mid \cdot \mid h \rangle &= 1, \quad 0 \cdot \mid h \rangle = \langle h \mid \cdot 0 = 0, \\ \langle h \mid u_1 u_2 \cdot \mid h \rangle &= \langle h \mid u_1 \cdot u_2 \mid h \rangle = \langle h \mid \cdot u_1 u_2 \mid h \rangle \quad (u_1, u_2 \in \text{Vir}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

□

Shapovalov 形式は一意に決まることが Poincaré-Birkhoff-Witt の定理から分かります. 上の性質 (2.7) から中点 \cdot を省略して $\langle h \mid u \mid h \rangle := \langle h \mid u \cdot \mid h \rangle$ のように書くことにします.

例 2.16. 幾つか例を計算してみます.

$$\begin{aligned} \langle h \mid L_1 L_{-1} \mid h \rangle &= \langle h \mid [L_1, L_{-1}] \mid h \rangle = 2 \langle h \mid L_0 \mid h \rangle = 2h, \\ \langle h \mid L_2 L_{-2} \mid h \rangle &= \langle h \mid [L_2, L_{-2}] \mid h \rangle = \langle h \mid (4L_0 + \frac{c}{2}) \mid h \rangle = 4h + \frac{c}{2}, \\ \langle h \mid L_1^2 L_{-2} \mid h \rangle &= \langle h \mid L_1 [L_1, L_{-2}] \mid h \rangle = \langle h \mid L_1 3L_{-1} \mid h \rangle = 6h. \end{aligned} \quad \square$$

L_0 ウェイト分解から

$$M^*(c, h)_m \cdot M(c, h)_n = 0 \text{ if } m \neq n. \quad (2.8)$$

となることが分かります. また

$$\langle h \mid L_\lambda L_{-\mu} \mid h \rangle = \langle h \mid L_\mu L_{-\lambda} \mid h \rangle \quad \text{for any } \lambda, \mu. \quad (2.9)$$

も定義から従います.

Verma 加群の基底 (2.3) と双対 Verma 加群の基底 (2.5) から, Shapovalov 形式は

$$K_{\lambda, \mu}(c, h) := \langle c, h \mid L_\mu L_{-\lambda} \mid c, h \rangle.$$

を係数とする (無限サイズの) 行列 $(K_{\lambda,\mu})$ で決定されています. ここで λ と μ は分割全体を走ります. しかし, (2.8) より $|\lambda| = |\mu|$ でないと $K_{\lambda,\mu}(c, h) = 0$ なので, 結局各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $p(n) \times p(n)$ サイズの行列

$$K_n := (K_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu \in \mathcal{P}_n} \quad (2.10)$$

を考えればよいことになります (2.9) よりこれは対称行列です.

Vir の定義を使うと n が小さい所では K_n を計算することができます:

例 2.17.

$$\begin{aligned} K_1 &= (K_{(1),(1)}) = (2h), \\ K_2 &= \begin{pmatrix} K_{(1^2),(1^2)} & K_{(1^2),(2)} \\ K_{(2),(1^2)} & K_{(2),(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4h(1+2h) & 6h \\ 6h & 4h+c/2 \end{pmatrix}, \\ K_3 &= \begin{pmatrix} K_{(1^3),(1^3)} & K_{(1^3),(2,1)} & K_{(1^3),(3)} \\ K_{(2,1),(1^3)} & K_{(2,1),(2,1)} & K_{(2,1),(3)} \\ K_{(3),(1^3)} & K_{(3),(2,1)} & K_{(3),(3)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24h(1+h)(1+2h) & 12h(1+3h) & 24h \\ 12h(1+3h) & 8h^2+8h+ch & 10h \\ 24h & 10h & 6h+2c \end{pmatrix}. \\ K_4 &= \begin{pmatrix} K_{(1^4),(1^4)} & K_{(1^4),(2,1^2)} & K_{(1^4),(2,2)} & K_{(1^4),(3,1)} & K_{(1^4),(4)} \\ K_{(2,1^2),(1^4)} & K_{(2,1^2),(2,1^2)} & K_{(2,1^2),(2,2)} & K_{(2,1^2),(3,1)} & K_{(2,1^2),(4)} \\ K_{(2,2),(1^4)} & K_{(2,2),(2,1^2)} & K_{(2,2),(2,2)} & K_{(2,2),(3,1)} & K_{(2,2),(4)} \\ K_{(3,1),(1^4)} & K_{(3,1),(2,1^2)} & K_{(3,1),(2,2)} & K_{(3,1),(3,1)} & K_{(3,1),(4)} \\ K_{(4),(1^4)} & K_{(4),(2,1^2)} & K_{(4),(2,2)} & K_{(4),(3,1)} & K_{(4),(4)} \end{pmatrix} \quad (2.11) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 48h(1+2h)(2+3h) & 72h(2+3h) & 48h(1+4h) & 120h \\ * & 0 & 6h(8+8h+c) & 20h(1+2h) & 36h \\ * & * & 0 & 30h & 3(8h+c) \\ * & * & * & 0 & 14h \\ * & * & * & * & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \text{diag}(96h(1+h)(1+2h)(3+2h), 2h(16+c+58h+2ch+16h^2), \\ &\quad \frac{1}{2}(8h+c)(8+8h+c), 4h(3+3h+c), 8h+5c). \end{aligned}$$

対称行列なので K_4 では下三角部分を省略しました. □

事実 2.18. 行列式 $\det K_n$ を Kac 行列式と呼ぶ. これは次の表示式を持つ^{*6}

$$\det K_n(c, h) = \prod_{\lambda \in \mathcal{P}_n} 2^{\ell(\lambda)} z_\lambda \times \prod_{\substack{r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ rs \leq n}} (h - h_{r,s})^{p(n-rs)}. \quad (2.12)$$

^{*6} この公式は [K79] で予想され [FF82] で証明されました.

ここで z_λ は (1.8) で定義した整数であり, 零点 $h_{r,s}$ は, 変数変換

$$c = c(t) := 13 - 6(t + t^{-1}). \quad (2.13)$$

を用いると, 次の様に見える:

$$h_{r,s}(t) = h_{r,s}|_{c=c(t)} := \frac{(rt - s)^2 - (t - 1)^2}{4t}. \quad (2.14)$$

特異ベクトル v の定義に現れる条件 (2.4) から, v を基底 (2.3) で $v = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} c_\lambda L_{-\lambda} |c, h\rangle$ と展開した時の係数 $(c_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{P}_n}$ は行列 (2.10) の固有ベクトルで, 対応する固有値は 0 です. 従って $M(c, h)$ に特異ベクトルが存在するには Kac 行列式 (2.12) が 0 になる, 即ちある $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $rs \leq n$ があって $(c, h) = (c(t), h_{r,s}(t))$ となる必要十分です. 正確には次の事実が成立します.

事実 2.19. 2 つの自然数 $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $M(c(t), h_{r,s}(t))_{rs}$ に特異ベクトルが存在し, それは定数倍を除いて一意に定まる. \square

以下の説明では $M(c(t), h_{r,s}(t))_{rs}$ の特異ベクトルを

$$|\chi_{r,s}\rangle = P_{r,s}(t) |c(t), h_{r,s}(t)\rangle \in M(c(t), h_{r,s}(t))_{rs}, \quad P_{r,s}(t) \in U(\text{Vir})$$

と表すことにしましょう.

例 2.20. Shapovalov 形式の行列 (2.11) を使って, 特異ベクトルの具体形を求めましょう:

$$\begin{aligned} P_{1,1}(t) &= L_{-1}, \\ P_{2,1}(t) &= L_{-1}^2 - tL_{-2}, \\ P_{1,2}(t) &= L_{-1}^2 - t^{-1}L_{-2}, \\ P_{3,1}(t) &= L_{-1}^3 - 4tL_{-2}L_{-1} + 2t(2t - 1)L_{-3}, \\ P_{1,3}(t) &= L_{-1}^3 - 4t^{-1}L_{-2}L_{-1} + 2t^{-1}(2t^{-1} - 1)L_{-3}, \\ P_{4,1}(t) &= L_{-1}^4 - 10tL_{-2}L_{-1}^2 + 9t^2L_{-2}^2 + 2t(12t - 5)L_{-3}L_{-1} \\ &\quad - 6t(6t^2 - 4t + 1)L_{-4}, \\ P_{2,2}(t) &= L_{-1}^4 - 2(t + t^{-1})L_{-2}L_{-1}^2 + (t^2 - 2 + t^{-2})L_{-2}^2 \\ &\quad - 2(t - 3 + t^{-1})L_{-3}L_{-1} - 3(t - 2 + t^{-1})L_{-4}, \\ P_{1,4}(t) &= L_{-1}^4 - 10t^{-1}L_{-2}L_{-1}^2 + 9t^{-2}L_{-2}^2 + 2t^{-1}(12t^{-1} - 5)L_{-3}L_{-1} \\ &\quad - 6t^{-1}(6t^{-2} - 4t^{-1} + 1)L_{-4}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

$P_{r,s}(t) = P_{s,r}(t^{-1})$ に注意して下さい. \square

例 2.20 を見る限り, 特異ベクトルを明示化するのは難しそうです. 実は自由場表示を使うことでこの特異ベクトルと対称関数が密接に関連することが分かります.

2.3.3 自由場表示と特異ベクトルの明示化

Virasoro 代数の自由場表示の方法^{*7}を思い出しましょう.

事実&定義 2.21. (1) (中心拡大を持つ) 無限次元 Lie 環 \mathcal{H} を

$$\text{生成元: } a_n \ (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{関係式: } [a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0}$$

で定める. これを Heisenberg 代数と呼ぶ.

(2) $\rho \in \mathbb{C}$ を固定して, 対応

$$L_n \mapsto \mathcal{L}_n := \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \circ a_m a_{n-m} \circ - (n+1)\rho a_n, \quad C \mapsto 1 - 12\rho^2, \quad (2.16)$$

を考える. ここで $\circ \circ$ は正規積:

$$\circ a_m a_n \circ := \begin{cases} a_m a_n & (m < 0), \\ a_n a_m & (m \geq 0). \end{cases}$$

この対応により, 代数の準同型

$$\varphi : U(\text{Vir}) \rightarrow \widehat{U}(\mathcal{H}).$$

が well-defined, 即ち $\varphi(u_1)\varphi(u_2) = \varphi(u_1 u_2)$ ($u_1, u_2 \in U(\text{Vir})$). ここで $\widehat{U}(\mathcal{H})$ は $U(\mathcal{H})$ のある完備化^{*8}. この準同型 φ をボゾン化写像と呼ぶ. \square

次にこの準同型の誘導する表現の対応を復習します.

定義 2.22.

$$a_0 |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = \alpha |\alpha\rangle_{\mathcal{F}}, \quad a_n |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = 0 \ (n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$$

なる $|\alpha\rangle_{\mathcal{F}}$ で生成される \mathcal{H} の表現を \mathcal{F}_α と書き, Fock 表現と呼ぶ. 同様に,

$${}_{\mathcal{F}} \langle \alpha | a_0 = \alpha \cdot {}_{\mathcal{F}} \langle \alpha |, \quad {}_{\mathcal{F}} \langle \alpha | a_{-n} = 0 \ (n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$$

なる ${}_{\mathcal{F}} \langle \alpha |$ で生成される \mathcal{H} の右表現を \mathcal{F}_α^* と書き, 双対 Fock 表現と呼ぶ. \square

^{*7} 今回お話しするのは Feigin-Fuchs のボゾン化 [FF82] です.

^{*8} 次の様なイデアルを使った完備化です. まず $\deg a_m := m$ で $U(\mathcal{H})$ 上の次数を定義します. そして $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, a_m ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) 達の多項式で次数 n 以上のものの生成する $U(\mathcal{H})$ のイデアルを I_n と書きます. そして $\widehat{U}(\mathcal{H})$ をイデアル列 I_n による完備化で定義します: $\widehat{U}(\mathcal{H}) := \varprojlim_n \widehat{U}(\mathcal{H})/I_n$.

Fock 表現は a_0 ウェイト分解

$$\mathcal{F}_\alpha = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}_{\alpha, n}, \quad \mathcal{F}_{\alpha, n} := \{v \in \mathcal{F} \mid a_0 v = (n + \alpha)v\} \quad (2.17)$$

を持ち, 各ウェイト空間 $\mathcal{F}_{\alpha, n}$ は次の基底を持ちます:

$$\mathcal{F}_{\alpha, n} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \mathbb{C} a_{-\lambda} |\alpha\rangle_{\mathcal{F}}. \quad (2.18)$$

但し分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ に対し $a_{-\lambda} := a_{-\lambda_k} \cdots a_{-\lambda_2} a_{-\lambda_1}$ と略記しました.

事実&定義 2.23. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ に対し $\mathcal{L}_{-\lambda} := \mathcal{L}_{-\lambda_1} \cdots \mathcal{L}_{-\lambda_k}$ と略記すると, (2.16) は写像

$$\psi : M(c, h) \rightarrow \mathcal{F}_\alpha, \quad L_{-\lambda} |c, h\rangle \mapsto \mathcal{L}_{-\lambda} |\alpha\rangle_{\mathcal{F}}$$

と整合的, 即ち

$$\psi(xv) = \varphi(x)\psi(v) \quad (x \in \text{Vir}, v \in M(c, h)).$$

ここで $M(c, h)$ と \mathcal{F}_α のパラメータは次のように対応させる:

$$c = 1 - 12\rho^2, \quad h = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\rho). \quad (2.19)$$

□

次に [AMOS95] に従って Fock 空間 \mathcal{F}_α と対称関数環を同一視します^{*9}:

事実&定義 2.24. 次の写像は線形空間の同型を与える:

$$\iota : \mathcal{F}_\alpha \otimes \mathbb{C}(t^{1/2}) \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}(t^{1/2})}, \quad v \mapsto {}_{\mathcal{F}} \langle \alpha | \exp\left(\frac{t^{1/2}}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} p_n\right) v.$$

この同型で, \mathcal{F}_α の基底 (2.18) の元は次のように変換される:

$$\iota(a_{-n} |\alpha\rangle_{\mathcal{F}}) = \frac{t^{1/2}}{\sqrt{2}} p_n, \quad \iota(a_{-\lambda} |\alpha\rangle_{\mathcal{F}}) = \left(\frac{t^{1/2}}{\sqrt{2}}\right)^{\ell(\lambda)} p_\lambda. \quad \square$$

^{*9} ボゾン a_{-n} と冪対称関数 p_n を同一視するのが今回の話のキーポイントです

パラメータの対応 (2.19) で特異ベクトルの存在の必要十分条件 $(c, h) = (c(t), h_{r,s}(t))$ ((2.13), (2.14) を参照) を読みかえると次のようになります.

$$\begin{aligned} c &= 1 - 12\rho(t)^2, & h &= h_{r,s} = \frac{1}{2}\alpha_{r,s}(t)(\alpha_{r,s} - 2\rho(t)) \\ \rho(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(t^{1/2} - t^{-1/2}), & \alpha_{r,s}(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}((r+1)t^{1/2} - (s+1)t^{-1/2}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

例 2.25. 例 (2.15) と Feigin-Fuchs ボゾン化 (2.16) を用いて, 特異ベクトルのボゾン化

$$\iota \circ \psi(|\chi_{r,s}\rangle) = \iota \circ \psi(P_{r,s}(t) |c(t), h_{r,s}(t)\rangle) = \iota(\varphi(P_{r,s}(t)) |\alpha_{r,s}(t)\rangle_{\mathcal{F}})$$

を計算することができます. 簡単な例ですが $|\chi_{1,1}\rangle$ と $|\chi_{1,2}\rangle$ をやってみます. まず

$$\varphi(L_{-1}) |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = \left[\frac{1}{2} \circ (\cdots + a_1 a_{-2} + a_0 a_{-1} + a_{-1} a_0 + a_{-2} a_1 + \cdots) \circ \right] |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = \alpha a_{-1} |\alpha\rangle_{\mathcal{F}}$$

から

$$\begin{aligned} \iota \circ (|\chi_{1,1}\rangle) &= \iota(\varphi(P_{1,1}(t)) |\alpha\rangle_{\mathcal{F}}) = \iota(\varphi(L_{-1}) |\alpha_{1,1}(t)\rangle_{\mathcal{F}}) \\ &= \iota(\alpha_{1,1}(t) a_{-1} |\alpha_{1,1}(t)\rangle_{\mathcal{F}}) = \sqrt{2}(t^{1/2} - t^{-1/2}) \iota(a_{-1} |\alpha_{1,1}(t)\rangle_{\mathcal{F}}) \\ &= \sqrt{2}(t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot \frac{t^{1/2}}{\sqrt{2}} p_1 = (t-1)p_1 = (t-1)J_{(1)}^{(t)}. \end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned} \varphi(L_{-2}) |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} &= \left[\frac{1}{2} \circ (\cdots + a_1 a_{-3} + a_0 a_{-2} + a_{-1} a_{-1} + a_{-2} a_0 + a_{-3} a_1 \cdots) \circ \right. \\ &\quad \left. - \rho(-2+1)a_{-2} \right] |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = ((\alpha + \rho)a_{-2} + \frac{1}{2}a_{-1}^2) |\alpha\rangle_{\mathcal{F}}, \\ \varphi(L_{-1}^2) |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} &= \left[\frac{1}{2} \circ (\cdots + a_2 a_{-3} + a_1 a_{-2} + a_0 a_{-1} + a_{-2} a_1 + a_{-2} a_1 \right. \\ &\quad \left. + a_{-3} a_2 + \cdots) \circ \right] \alpha a_{-1} |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = (\alpha a_{-2} + \alpha^2 a_{-1}^2) |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \iota \circ (|\chi_{1,2}\rangle) &= \iota(\varphi(P_{1,2}(t)) |\alpha\rangle_{\mathcal{F}}) = \iota(\varphi(L_{-1}^2 - t^{-1}L_{-2}) |\alpha_{1,2}(t)\rangle_{\mathcal{F}}) \\ &= \iota \left[\{(\alpha_{1,2}(t)a_{-2} + \alpha_{1,2}(t)^2 a_{-1}^2) - t^{-1}((\alpha_{1,2}(t) + \rho)a_{-2} + \frac{1}{2}a_{-1}^2)\} |\alpha_{1,2}(t)\rangle_{\mathcal{F}} \right] \\ &= \iota \left[\frac{\sqrt{2}}{t^{3/2}}(t-2)(t-1)a_{-2} + \frac{2}{t}(t-2)(t-1)a_{-1}^2 |\alpha_{1,2}(t)\rangle_{\mathcal{F}} \right] \\ &= (t-2)(t-1)(t^{-1}p_2 + p_1^2) = (t-2)(t-1)J_{(2)}^{(t)}. \end{aligned}$$

最後に例 2.7 を用いました.

4 の分割まで同様の計算をすると、結果は以下の様になります:

$$\begin{aligned}
\iota \circ \psi(|\chi_{1,1}\rangle) &= J_{(1)}^{(t)} \cdot (t-1), \\
\iota \circ \psi(|\chi_{2,1}\rangle) &= J_{(1^2)}^{(t)} \cdot (t-1)(2t-1), \\
\iota \circ \psi(|\chi_{1,2}\rangle) &= J_{(2)}^{(t)} \cdot (t-1)(t-2), \\
\iota \circ \psi(|\chi_{3,1}\rangle) &= J_{(1^3)}^{(t)} \cdot (t-1)(2t-1)(3t-1), \\
\iota \circ \psi(|\chi_{1,3}\rangle) &= J_{(3)}^{(t)} \cdot (t-1)(t-2)(t-3), \\
\iota \circ \psi(|\chi_{4,1}\rangle) &= J_{(1^4)}^{(t)} \cdot (t-1)(2t-1)(3t-1)(4t-1), \\
\iota \circ \psi(|\chi_{2,2}\rangle) &= J_{(2^2)}^{(t)} \cdot (t-1)(t-2)(2t-1)(2t-2), \\
\iota \circ \psi(|\chi_{1,4}\rangle) &= J_{(4)}^{(t)} \cdot (t-1)(t-2)(t-3)(t-4).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

ここで $J_{\lambda}^{(t)}$ は integral Jack 対称関数 (定義 2.3) です. □

上の例から、特異ベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ をボゾン a_n で表し、 a_{-n} を冪和対称関数 p_n で置き換えると、それは $J_{(s^r)}^{(t)}$ に比例することが観察されます。実際、以下の事実が成立します*10:

事実 2.26. (1) [MY95] ボゾン化写像 ψ と同型 ι によって、特異ベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ は integral Jack 対称関数に写る:

$$\iota \circ \psi(|\chi_{r,s}\rangle) \propto J_{(s^r)}^{(t)}.$$

(2) [SaSAFR05] 比例定数は次式で与えられる:

$$B_{r,s}(t) := \prod_{k=1}^r \prod_{l=1}^s (kt - l). \tag{2.22}$$

□

2.4 W 代数

事実 2.26 によって、Virasoro 代数の特異ベクトルは Jack 対称関数 $J_{\lambda}^{(\beta)}$ で表せることが分かりました。しかし、ここで現れる分割 λ は (s^r) という形のもの、Young 図形でいうと長方形のもの、に限られました。そこで、

特異ベクトルが一般の分割の Jack 対称関数に対応するような代数はないか?

*10 証明には Fock 表現の間の screening operator と Jack 対称多項式の積分表示が必要になります。

という疑問がわきます。実は W 代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_n)$ というものがこの問題の答えになります。

W 代数の定義を述べる前に簡単な例をあげます。 $n = 2$ の時が Virasoro 代数 Vir です。 $n = 3$ の時の $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_3)$ は次の生成元と関係式^{*11} で定義される代数です：

生成元: $C, L_n (n \in \mathbb{Z}), W_n (n \in \mathbb{Z})$

関係式: $[C, \mathcal{W}(\mathfrak{sl}_3)] = 0,$

$$\begin{aligned}
 [L_m, L_n] &= (m - n)L_{m+n} + \frac{C}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}, \\
 [W_m, W_n] &= (m - n) \left\{ \frac{1}{15}(m + n + 3)(m + n + 2) - \frac{1}{6}(m + 2)(n + 2) \right\} L_{m+n} \\
 &\quad + \frac{16}{22 + 5C}(m - n)\Lambda_{m+n} + \frac{C}{360}m(m^2 - 1)(m^2 - 4)\delta_{m+n,0}, \\
 \text{但し } \Lambda_n &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \circ L_{n-k} L_k \circ - \frac{3}{10}(n + 2)(n + 3)L_n.
 \end{aligned}$$

このように $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_3)$ はもはや Lie 環にはなりません。 W 代数^{*12} というのは頂点作用素代数として定義されます。

W 代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_n)$ にも自由場表示があって、Heisenberg 代数の Fock 表現と W 代数の表現が対応します。この Fock 表現はやはり対称関数環と同一視できて、これらの対応で、 $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_n)$ の特異ベクトルは Jack 対称関数 $P_\lambda^{(\beta)}$ と対応します。ここで現れる分割 λ は図 6 のような $n - 1$ ブロックの Young 図形に対応します。図の状況だと、 λ の転置は $\lambda^\vee = (r_1^{s_1}, r_2^{s_2}, \dots, r_{n-1}^{s_{n-1}})$ と書けます。

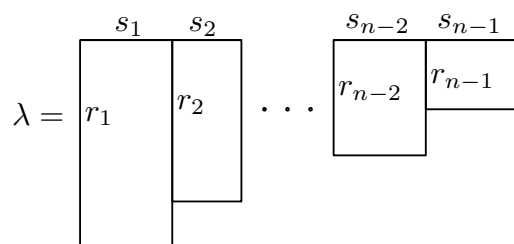


図 6 $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_n)$ 代数の特異ベクトルに対応する Jack 対称関数の分割

^{*11} 関係式の最終行で分母に $22 + 5C$ が入っていますが、生成元 W_n を再定義すれば分母に C が含まれない形になるので、あまり問題にはなりません。

^{*12} 一般には、 W 代数というのは有限次元 Lie 環 \mathfrak{g} とその冪零元 e に対して定まる頂点作用素代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g}, e)$ のことです。その定義には量子 Drinfeld-Sokolov 還元とよばれる Hamiltonian 還元法を用います。本文中で $\mathcal{W}(\mathfrak{sl}_n)$ と書いたのは、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ かつ e が principal の場合です。

2.5 この節のまとめ

- この節では対称関数環上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta$ に関する直交函数系として Jack 対称函数を導入しました.
- 更にその有限変数版である Jack 対称多項式が Calogero-Sutherland 模型という量子力学系の固有状態を表すことに触れました.
- Jack 対称函数は Virasoro 代数の特異ベクトルの自由場表示にも現れることを確かめました.

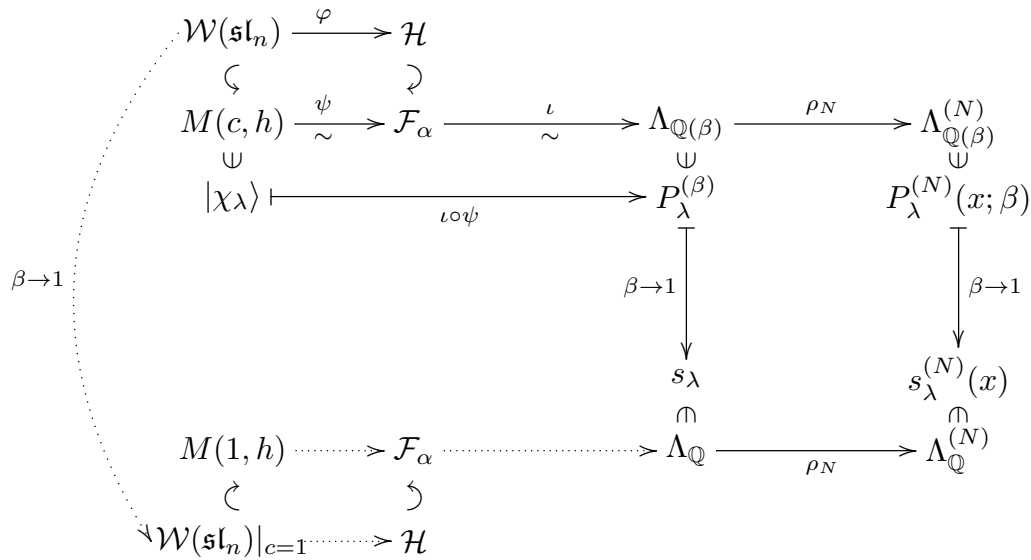


図7 §2のまとめ

3 Macdonald 対称関数

この節では Macdonald 対称関数の導入をします. 各種の記号は, 基本的には Macdonald の対称関数の教科書 [Mac95] に従います. 次に変形 Virasoro 代数の特異ベクトルの自由場表示に Macdonald 対称関数が現れることを紹介します. 最後に Macdonald 差分作用素の自由場表示と Feigin-Odesskii 代数との関連を述べます.

3.1 対称関数環上の変形内積と Macdonald 対称関数 $P_\lambda^{(q,t)}$

以下 q, t を不定元とし, $\mathbb{F} := \mathbb{Q}(q, t)$ 上の対称多項式を考えます.

事実&定義 3.1. 任意の分割 λ に対し Macdonald 対称関数 $P_\lambda^{(q,t)} \in \Lambda_{\mathbb{F}}$ が次の 2 条件

- $P_\lambda^{(q,t)} = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} c_{\lambda,\mu} m_\mu \quad (c_{\lambda,\mu} \in \mathbb{F}),$
- $\langle P_\lambda^{(q,t)}, P_\mu^{(q,t)} \rangle_{q,t} = 0 \quad \text{for } \mu \neq \lambda$

で一意に決定される. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q,t}$ は次の式で定まる $\Lambda_{\mathbb{F}}$ 上の内積:

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} := \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda \prod_{k \geq 1} \frac{1 - q^{\lambda_k}}{1 - t^{\lambda_k}}. \quad (3.1)$$

例 3.2. 具体的な形は次のようになります:

$$\begin{aligned} P_{(1)}^{(q,t)} &= p_1, \\ P_{(2)}^{(q,t)} &= \frac{(1-q)(1+t)}{2(1-qt)} p_2 + \frac{(1+q)(1-t)}{2(1-qt)} p_1^2, \\ P_{(1^2)}^{(q,t)} &= -\frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{2} p_1^2, \\ P_{(3)}^{(q,t)} &= \frac{1}{3} \frac{1-t^3}{1-t} \frac{(1-q)(1-q^2)}{(1-qt)(1-qt^2)} p_3 + \frac{(1-q^3)(1-t^2)}{2(1-qt)(1-q^2t)} p_2 p_1 \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{1-q^2}{1-q} \frac{1-q^3}{1-q} \frac{(1-t)^2}{(1-qt)(1-q^2t)} p_1^3, \\ P_{(2,1)}^{(q,t)} &= -\frac{1}{3} \frac{1-t^3}{1-t} \frac{1-q}{1-qt^2} p_3 - \frac{1}{2} \frac{1-t^2}{1-t} \frac{q-t}{1-qt^2} p_2 p_1 + \frac{2+q+t+2qt}{6} \frac{1-t}{1-qt^2} p_1^3, \\ P_{(1^3)}^{(q,t)} &= \frac{1}{3} p_3 - \frac{1}{2} p_2 p_1 + \frac{1}{6} p_1^3. \end{aligned}$$

m_λ での展開に関する三角性と m_λ 達が Λ の基底をなすことから, $\{P_\lambda^{(q,t)} \mid \lambda \in \mathcal{P}\}$ は $\Lambda_{\mathbb{F}}$ の \mathbb{F} 基底になることが分かります. また内積の定義 (3.1) から対称関数の退化図式が得られます (図 8). ここで $P_\lambda^{(\beta)}$ は Jack 対称関数, $\tilde{P}_\lambda^{(q)}$ は Hall-Littlewood 対称関数, s_λ は Schur 対称関数です.

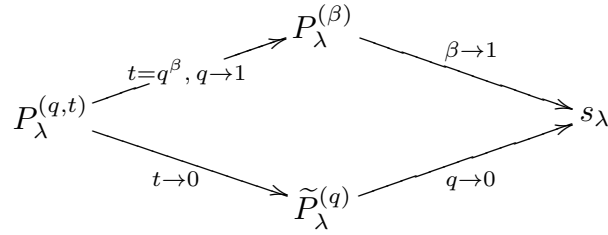


図 8 対称関数の退化図式

3.2 変形 Virasoro 代数の特異ベクトル

Jack 対称関数は W 代数の特異ベクトルの自由場表示に現れました. そこで,

特異ベクトルが Macdonald 対称関数に対応するような代数はないか?

という問題を考えてみます. これに答えを与えたのが [SKAO96], [AKOS96] の仕事です.

まず Virasoro 代数の “Macdonald 版” である変形 Virasoro 代数から紹介します.

定義 3.3. q, t を generic な複素数とし, $p := q/t$ と置く. 変形 Virasoro 代数 $\text{Vir}_{q,t}$ とは

生成元: $T_n (n \in \mathbb{Z}),$

$$\begin{aligned} \text{関係式: } [T_n, T_m] = & - \sum_{\ell=1}^{\infty} f_\ell (T_{n-\ell} T_{m+\ell} - T_{m-\ell} T_{n+\ell}) \\ & - \frac{(1-q)(1-t^{-1})}{1-p} (p^n - p^{-n}) \delta_{n+m,0}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\text{但し } \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)(1-t^{-n})}{1+p^n} \frac{z^n}{n} \right],$$

で与えられる結合代数である. □

Vir と同様に $\text{Vir}_{q,t}$ にも Verma 加群が定義できます.

定義 3.4. (1) $h \in \mathbb{C}$ に対し $\text{Vir}_{q,t}$ の Verma 加群 M_h を,

$$T_n |h\rangle = 0 \quad (n > 0), \quad T_0 |h\rangle = h |h\rangle$$

なる $|h\rangle$ で生成される $\text{Vir}_{q,t}$ 加群として定義する.

(2) 双対 Verma 加群 M_h^* も同様に

$$\langle h|T_{-n} = 0 \ (n > 0), \quad \langle h|T_0 = h \langle h|$$

なる $\langle h|$ で生成される右 $\text{Vir}_{q,t}$ 加群として定義する. □

線形空間として $M_h \cong \mathbb{C}[T_{-1}, T_{-2}, \dots] |h\rangle$ なので, $\deg T_n := -n$ によって M_h は $M_h = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M_{h,n}$ と次数分解できます. 同様の次数付けで $M_h^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} M_{h,n}^*$ という分解も存在します.

変形版の Shapovalov 形式も定義することが可能です:

定義 3.5. 双線形形式 (Shapovalov 形式と呼ぶ) $\cdot : M_h^* \times M_h \rightarrow \mathbb{C}$ が

$$\langle h| \cdot |h\rangle = 1, \quad 0 \cdot |h\rangle = \langle h| \cdot 0 = 0, \quad \langle h| u_1 u \cdot u_2 |h\rangle = \langle h| u_1 \cdot u \cdot u_2 |h\rangle$$

という性質で一意に決まる. この時 $n \neq m$ なら $M_{h,m} \cdot M_{h,n} = 0$ である. □

Vir に関する Kac 行列式 (2.12) と同様に, $\text{Vir}_{q,t}$ の Shapovalov 形式の行列式も因数分解します. 次数 n の部分空間に制限した Shapovalov 形式 $\cdot : M_{h,n}^* \cdot M_{h,n} \rightarrow \mathbb{C}$ の行列式を \det_n と書きましょう.

事実 3.6. ^{*13}

$$\det_n = \prod_{\substack{r,s \geq 1 \\ rs \leq N}} \left(\frac{(1-q^r)(1-t^r)}{q^r + t^r} \right)^{p(N-rs)} (\lambda^2 - \lambda_{r,s}^2)^{p(N-rs)}. \quad \square$$

$M_{h,n}$ の元が (レベル n の) 特異ベクトル v とは, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{ge1}$ について $T_n v = 0$ が成立する時を言います.

3.2.1 変形 Virasoro 代数の自由場表示

Virasoro 代数と Jack 対称関数を結び付けるには自由場表示が必要でした. その Macdonald 版にも自由場が登場します.

定義 3.7. $q, t \in \mathbb{C}$ を generic な複素数とする.

^{*13} [BP98] で証明されました.

(1) 次の生成元と関係式で定義される Heisenberg 代数^{*14}を $\mathcal{H}_{q,t}$ と書く:

$$\text{生成元: } a_n \ (n \in \mathbb{Z}), \quad \text{関係式: } [a_n, a_m] = n \frac{1 - q^{|n|}}{1 - t^{|n|}} \delta_{n+m,0}.$$

(2) $\Lambda^\pm \in \widehat{U}(\mathcal{H}_{q,t})$ を次式で定義する^{*15}:

$$\Lambda^\pm(z) := p^{1/2} \exp \left[\pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - t^{-n}}{1 + p^n} \frac{a_{-n}}{n} z^n \right] \exp \left[\mp \sum_{n=1}^{\infty} (1 - t^n) \frac{a_n}{n} z^{-n} \right] q^{\pm \beta a_0}. \quad \square$$

事実 3.8. 代数準同型 $\varphi_{q,t} : \text{Vir}_{q,t} \rightarrow \widehat{U}(\mathcal{H}_{q,t})$ が

$$T(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} T_n z^{-n} \mapsto \Lambda^+(p^{-1/2} z) + \Lambda^+(p^{1/2} z)$$

で定義される. つまり, 右边を z で展開した係数は $\text{Vir}_{q,t}$ の定義関係式 (3.2) を満たす. \square

次に Fock 表現を与えましょう:

定義 3.9. α を複素数とする. $\mathcal{H}_{q,t}$ の Fock 表現 $\mathcal{F}_{\alpha;q,t}$ とは,

$$a_n |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = 0 \ (n \geq 1), \quad a_0 |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = \alpha |\alpha\rangle_{\mathcal{F}}$$

なる $|\alpha\rangle_{\mathcal{F}}$ で生成される $\mathcal{H}_{q,t}$ 表現のことである. 双対 Fock 表現 $\mathcal{F}_{\alpha;q,t}^*$ も $\langle \alpha |_{\mathcal{F}}$ で生成されるものとして同様に定義される. \square

事実 3.8 より次のような計算ができます:

$$\varphi_{q,t}(T_0) |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = (p^{1/2} q^\alpha + p^{-1/2} q^{-\alpha}) |\alpha\rangle_{\mathcal{F}}, \quad \varphi_{q,t}(T_n) |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} = 0 \ (n \geq 1).$$

これから次の事実が従います:

事実 3.10. $\text{Vir}_{q,t}$ の Verma 加群 M_h から $\mathcal{H}_{q,t}$ の Fock 空間 $\mathcal{F}_{\alpha;q,t}$ への線形写像

$$\begin{aligned} \psi_{q,t} : M_h &\rightarrow \mathcal{F}_{\alpha;q,t} \\ u |h\rangle &\mapsto \varphi(u) |\alpha\rangle_{\mathcal{F}} \quad (u \in \text{Vir}_{q,t}) \end{aligned}$$

が定義できて, φ と整合的である. 即ち

$$\varphi_{q,t}(u) \psi_{q,t}(v) = \psi_{q,t}(uv) \quad (u \in \text{Vir}_{q,t}, v \in M_h). \quad \square$$

^{*14} これは Naihuan Jing が [Jin94] で導入したもの. その後 [SKAO96] などで用いられていました.

^{*15} ここで $\widehat{U}(\mathcal{H}_{q,t})$ は事実&定義 2.21 と同様に定義した $U(\mathcal{H}_{q,t})$ の完備化です

後は Fock 空間と対称函数環の同一視だけです.

事実&定義 3.11. 次の写像 $\iota_{q,t}$ は線形同型写像である:

$$\begin{aligned} \iota_{q,t}: \mathcal{F}_{\alpha;q,t} &\rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}} \\ u|\alpha\rangle_{\mathcal{F}} &\mapsto \mathcal{F}\langle\alpha|\exp\left(\frac{1-t^n}{1-q^n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}p_n\right)v. \end{aligned}$$

この写像で $a_{-\lambda}|\alpha\rangle_{\mathcal{F}}$ は幕対称函数に写る:

$$\iota_{q,t}(a_{-\lambda}|\alpha\rangle_{\mathcal{F}}) = p_{\lambda}. \quad \square$$

例 3.12. $\text{Vir}_{q,t}$ の特異ベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ を自由場表示すると次のようになります:

$$\begin{aligned} \iota(|\chi_{1,1}\rangle) &= \frac{q-t}{qt}J_{(1)}^{(q,t)}, \\ \iota(|\chi_{1,2}\rangle) &= \frac{q-t}{qt}\frac{q^2-t}{q^2t}J_{(2)}^{(q,t)}, & \iota(|\chi_{2,1}\rangle) &= \frac{q-t}{qt}\frac{q-t^2}{qt^2}J_{(1^2)}^{(q,t)}, \\ \iota(|\chi_{1,3}\rangle) &= \frac{q-t}{qt}\frac{q^2-t}{q^2t}\frac{q^3-t}{q^3t}J_{(3)}^{(q,t)}, & \iota(|\chi_{3,1}\rangle) &= \frac{q-t}{qt}\frac{q-t^2}{qt^2}\frac{q-t^3}{qt^3}J_{(1^3)}^{(q,t)}. \quad \square \end{aligned}$$

事実 3.13. $\text{Vir}_{q,t}$ の特異ベクトル $|\chi_{r,s}\rangle$ の自由場表示 $\iota_{q,t} \circ \psi_{q,t}(|\chi_{r,s}\rangle)$ は Young 図形が長方形になる分割 (s^r) の Macdonald 対称函数 $P_{(s^r)}^{(q,t)}$ に比例する. \square

ここでも現れる分割は (s^r) で, 対応する Young 図形は長方形です. 一般の分割の Macdonald 対称函数が特異ベクトルに現れる代数が変形 W 代数 $\mathcal{W}_{q,t}(\mathfrak{sl}_n)$ です [AKOS96]. Jack 対称函数の時と同様に, $n=2$ の時が $\text{Vir}_{q,t}$ になります.

3.3 Macdonald 対称多項式

§3.1 では対称函数環の直交系として Macdonald 対称函数を導入しました. 実は有限変数版の Macdonald 対称多項式はある差分作用素の固有函数として定義できます. この副節ではその事実を簡単に紹介します.

定義 3.14. (1) q 差分作用素 T_{q,x_i} を次のように定義する:

$$T_{q,x_i}f(x_1, x_2, \dots, x_N) = f(x_1, x_2, \dots, qx_i, \dots, x_N).$$

(2) Macdonald 差分作用素^{*16} $D_r^{(N)}$ ($1 \leq r \leq N$) を次で定義する:

$$D_r^{(N)} := \sum_{\substack{J \subset \{1,2,\dots,N\} \\ \#J=r}} \left[t^{r(r-1)/2} \prod_{\substack{j \in J \\ k \notin J}} \frac{tx_j - x_k}{x_j - x_k} \prod_{j \in J} T_{q,x_j} \right]. \quad (3.3) \quad \square$$

$D_r^{(N)}$ は $\Lambda_{\mathbb{F}}^{(N)}$ に作用する. $D_r^{(N)}$ の “ r ” は r 階の差分作用素という意味です.

事実&定義 3.15. $\lambda \in \tilde{\mathcal{P}}^{(N)}$ について, Macdonald 対称多項式 $P_\lambda^{(N)}(x; q, t) \in \Lambda_{\mathbb{F}}^{(N)}$ は次の 2 条件によって一意に決まる.

- $P_\lambda^{(N)} = m_\lambda^{(N)} + \sum_{\lambda > \mu} c_{\lambda,\mu}^{(N)} m_\mu^{(N)} \quad (c_{\lambda,\mu}^{(N)} \in \mathbb{F}),$
- $D_1^{(N)} P_\lambda^{(N)}(x; q, t) = P_\lambda^{(N)}(x; q, t) \cdot e_1^{(N)}(t^N s_\lambda^{(N)}).$

(3.4) □

ここで $D_1^{(N)}$ に関する固有値を書くのに

$$s_\lambda^{(N)} := (q^{\lambda_1} t^{-1}, q^{\lambda_2} t^{-2}, \dots, q^{\lambda_k} t^{-k}, t^{-k-1}, t^{-k-2}, \dots, t^{-N}) \in \mathbb{F}^N \quad (3.5)$$

を用いました. これはスペクトルパラメータと呼ばれます. また,

$$t^N s_\lambda^{(N)} = (q^{\lambda_1} t^{N-1}, \dots, q^{\lambda_k} t^{N-k}, t^{N-k-1}, \dots, 1)$$

という記号も用いました. すると基本対称多項式の定義から固有値は次の様になります:

$$e_1^{(N)}(t^N s_\lambda^{(N)}) = e_1^{(N)}(q^{\lambda_1} t^{N-1}, \dots, q^{\lambda_k} t^{N-k}, t^{N-k-1}, \dots, 1) = \sum_{i=1}^N q^{\lambda_i} t^{N-i}.$$

上で述べた Macdonald 対称多項式 $P_\lambda^{(N)}(x; q, t)$ の定義には 1 階の差分作用素 $D_r^{(1)}$ しかなかった. しかし実際には, $P_\lambda^{(N)}(x; q, t)$ は Macdonald 差分作用素族 $\{D_r^{(N)} \mid 1 \leq r \leq N\}$ の同時固有函数です. 詳しく述べると:

事実 3.16. (1) $\{D_r^{(N)} \mid 1 \leq r \leq N\}$ は互いに可換である:

$$[D_r^{(N)}, D_s^{(N)}] = 0 \quad (1 \leq r, s \leq N).$$

(2) $P_\lambda^{(N)}(x; q, t)$ は差分作用素族 $\{D_r^{(N)} \mid 1 \leq r \leq N\}$ の同時固有函数である:

$$D_r^{(N)} P_\lambda^{(N)}(x; q, t) = P_\lambda^{(N)}(x; q, t) \cdot e_r^{(N)}(t^N s_\lambda^{(N)}). \quad (3.6) \quad \square$$

ここではスペクトルパラメータ (3.5) を用いました. (3.6) の $r = 1$ の場合が (3.4) です.

^{*16} Macdonald の教科書 [Mac95] は D_N^r という記号を用いていますが, 今回の話では上添え字の (N) で “ N 変数のもの” を表すことにしたので, ここで導入した $D_r^{(N)}$ という記号を用いることにしました.

3.4 対称関数環上の差分作用素族

前々副節では Macdonald 対称関数を内積 (3.1) に関する直交基底として定義しました。しかし対称多項式の時と同様に, 差分作用素を使っても Macdonald 対称関数の定義をすることが可能です^{*17}。ここでは [S03, 第 3 章] 及び [FHHSY09, §III] に従って対称関数環 $\Lambda_{\mathbb{F}}$ に作用する差分作用素を定義します。

実は有限変数版の差分作用素 $D_r^{(N)}$ (3.3) は制限写像 $\rho_{M,N}$ (1.6) と整合的ではありません。しかし $\Lambda_{\mathbb{F}}^{(N)}$ 上の差分作用素 $E_r^{(N)}$ を

$$E_r^{(N)} := \sum_{j=0}^r \frac{t^{-Nr - \binom{r-j+1}{2}}}{(t^{-1}; t^{-1})_{r-j}} D_j^{(N)}, \quad (x; q)_k := \prod_{i=0}^{k-1} (1 - xq^i) \quad (3.7)$$

で定義すると

$$\rho_{N,N-1} \circ E_r^{(N)} = E_r^{(N-1)} \circ \rho_{N,N-1}$$

となり整合的になります。従って

$$E_r := \varprojlim_N E_r^{(N)} : \Lambda_{\mathbb{F}} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}}$$

が well defined です。そして次の固有方程式が成立します: 任意の分割 λ と任意の自然数 r に対して

$$E_r P_{\lambda}(x; q, t) = P_{\lambda}(x; q, t) \cdot e_r(s_{\lambda}). \quad (3.8)$$

但しここで分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ に対し無限変数版のスペクトルパラメータ

$$s_{\lambda} := (q^{\lambda_1} t^{-1}, q^{\lambda_2} t^{-2}, \dots, q^{\lambda_k} t^{-k}, t^{-k-1}, t^{-k-2}, \dots) \quad (3.9)$$

を用いました。(3.8) は固有方程式 (3.6) の自然な無限変数類似になっています。

3.5 Macdonald 差分作用素の自由場表示

前節の後半で無限変数の対称関数を導入しましたが, その理由は, 対称関数環 Λ が Heisenberg 代数の Fock 空間と自然に同一視でき, 更に Λ 上の差分作用素が Heisenberg 代数の頂点作用素を用いて実現できるからです^{*18}。

^{*17} 教科書 [Mac95] では, 内積を用いて $P_{\lambda}^{(q,t)}$ を定義し, 存在証明に差分作用素を用います。

^{*18} この様な対称関数と量子代数との関連は可積分系とそれまつわる表現論において幾度も発見されています: (KP 階層の τ 関数としての) Schur 対称関数と \mathfrak{gl}_{∞} 代数, (Calgero-Sutherland 模型の固有関数と

この節ではパラメータを含む Heisenberg 代数を利用した $\Lambda_{\mathbb{F}}$ 上の Macdonald 差分作用素の自由場表示を紹介します. これは主に [S03, 第 3 章], [S06] で扱われている内容です.

3.5.1 自由場表示

変形された Heisenberg 代数 $\mathcal{H}_{q,t}$ の定義 3.7 とその Fock 空間 $\mathcal{F}_{\alpha;q,t}$ の定義 3.9 を思い出しましょう. また Fock 加群と対称関数環の同型 $\iota_{q,t}$ (事実&定義 3.11) も思い出します.

定義 3.17. $\iota_{q,t} : \Lambda_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\alpha;q,t}$ の同一視のもとで, $E \in \text{End}(\Lambda_{\mathbb{F}})$ が $\widehat{E} \in \widehat{U}(\mathcal{H}_{q,t})$ と対応する時, \widehat{E} を E の自由場表示という. \square

例 3.18. $E_1 \in \text{End} \Lambda_{\mathbb{F}}$ (3.7) の自由場表示を与えます*19. 頂点作用素*20

$$\eta(z) := \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\right) \quad (3.10)$$

を $\eta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_n z^{-n}$ と展開した時の零モード η_0 で E_1 は自由場表示できます:

$$\widehat{E}_1 = \frac{\eta_0 - 1}{t - 1}. \quad \square$$

この例は 1 階の差分作用素 E_1 の自由場表示でした. 当然, 高階の差分作用素 E_r ($r = 2, 3, \dots$) の場合が気になりますが, これは次のような自由場表示を持ちます:

事実 3.19. *21 作用素 E_r は次の自由場表示を持つ:

$$\widehat{E}_r = \frac{[r]_{t^{-1}}!}{r!} \left[\prod_{1 \leq i < j \leq r} \varpi(z_j/z_i) \circ \eta(z_1) \eta(z_2) \cdots \eta(z_r) \circ \right]_1.$$

ここで

$$[r]_x := \frac{1-x^r}{1-x}, \quad [r]_x! := [r]_x \cdot [r-1]_x \cdots [1]_x, \quad \varpi(y) := \frac{(1-y)(1-y^{-1})}{(1-t^{-1}y)(1-t^{-1}y^{-1})}$$

であり, $\circ \circ$ は $\mathcal{H}_{q,t}$ での正規積, $[f(z_1, \dots, z_r)]_1$ は Laurent 級数 f の定数項である. \square

しての) Jack 対称関数と Virasoro 代数, Hall-Littlewood 対称関数と量子群, shifted Schur 対称関数と Yangian 等々.

*19 これは [S03, 命題 3.37] に書いてあります

*20 これは \mathfrak{gl}_{∞} 代数等で用いられた頂点作用素 $\exp(\sum_{n>0} \frac{1}{n} a_{-n} z^n) \exp(-\sum_{n>0} \frac{1}{n} a_n z^{-n})$ の “ q, t 変形” と思えます. 但し変形前の a_n の関係式は $[a_m, a_n] = m \delta_{m+n,0}$ です.

*21 [S06] で証明されました. [FHHSY09] でも再証明されています.

3.5.2 差分作用素族の代数構造に向けて

前副節で $\Lambda_{\mathbb{F}}$ に作用する Macdonald 差分作用素の自由場表示が出来た訳ですが, 次のような自然な疑問が浮かびます:

- 作用素の合成は自由場表示でどのように理解できるだろうか? (3.11)

また幾分 ad hoc ですが, 次の様な疑問も湧きます:

- 固有方程式 $E_r P_{\lambda}^{(q,t)} = P_{\lambda}^{(q,t)} \cdot e_r(s_{\lambda})$ の一般化として,

$$\mathcal{O}_{\mu} P_{\lambda}^{(q,t)} = P_{\lambda}^{(q,t)} \cdot P_{\mu}^{(q,t)}(s_{\lambda})$$
 (3.12)

なる作用素 \mathcal{O}_{μ} の自由場表示を構成, ないし特徴付けることはできるだろうか?

後者について少し詳しく述べましょう. まず, Macdonald 対称関数 $P_{\mu}^{(q,t)}$ で $\mu = (1^r)$ (Young 図形をイギリス流に書くと縦 1 列) とすると $e_r = P_{(1^r)}^{(q,t)}$ となります*22. 従って固有方程式 (3.8) で $\mu = (1^r)$ とすれば (3.12) になります. 次に有限変数の Macdonald 多項式 $P_r^{(n)}$ に対する “横 1 行の差分作用素” の存在に注意します:

事実 3.20. *23 差分作用素

$$H_r^{(N)} := \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^N \\ |\nu|=r}} \left[\prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{q^{\nu_i} x_i - q^{\nu_j} x_j}{x_i - x_j} \right] \left[\prod_{i,j=1}^N \frac{(tx_i/x_j; q)_{\nu_i}}{(qx_i/x_j; q)_{\nu_i}} \right] T_{q,x}^{\nu}$$

は $\mathbb{F}[D_1^{(N)}, \dots, D_N^{(N)}]$ に含まれ, 任意の $\lambda \in \tilde{\mathcal{P}}^{(N)}$ に対し

$$H_r^{(N)} P_{\lambda}^{(N)}(x; q, t) = P_{\lambda}^{(N)}(x; q, t) \cdot g_r^{(N)}(s_{\lambda}^{(N)}; q, t). \quad (3.13)$$

を満たす. 但し $g_r^{(n)}(y; q, t)$ ($1 \leq r \leq n$) は

$$\sum_{r \geq 0} g_r^{(n)}(y; q, t) u^r = \exp \left[\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \frac{1-t^m}{1-q^m} \sum_{i=1}^n y_i^m u^m \right]$$

で定義される対称多項式. □

*22 例 3.2 をご覧ください

*23 これは [N10, p.18] で述べられています

導出には Kajihara-Noumi による q 超幾何函数の双対変換公式 [KaN03] を用います. 実は

$$\lim_{\leftarrow N \rightarrow \infty} g_r^{(N)}(y; q, t) \propto P_{(r)}^{(N)}(y; q, t)$$

なので, もし (3.13) の無限変数極限が取れて差分作用素の自由場表示ができれば, それは (3.12) で $\mu = (r)$ の場合となります.

上にあげた 2 つの問い (3.11), (3.12) に答えるのが本稿の §§3.6-3.7 の目的です.

3.6 退化 \mathbb{CP}^1 上の Feigin-Odesskii 代数 \mathcal{A}

Macdonald 差分作用素の自由場表示のうち, 主に作用素の合成を記述するのに必要なのが, この節の表題にあげた代数 \mathcal{A} です.

この代数の定義とその幾つかの性質を理解するには Macdonald 対称函数の知識は不要です. 内容は [FHHSY09, §II] に基づきます. 殆どの命題の証明は本稿では省きます.

3.6.1 \mathcal{A} の定義

この節では q_1, q_2 を不定元とし, $F := \mathbb{Q}(q_1, q_2)$ 上で考えます. また, $q_3 := q_1^{-1}q_2^{-1}$ と置きます. Macdonald 対称函数の記号との対応は次の様になります:

$$q_1 \leftrightarrow q^{-1}, \quad q_2 \leftrightarrow t.$$

定義 3.21. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, F ベクトル空間 $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(q_1, q_2, q_3)$ を次の 4 条件で定める.

- (i) $\mathcal{A}_0 := F$. $n \geq 1$ なら \mathcal{A}_n の元 $f = f(z_1, \dots, z_n)$ は n 変数の F 係数対称有理式.
- (ii) f の極は対角線 $\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i = z_j, \exists i \neq j\}$ 上のみを高々 2 位で存在.
- (iii) 任意の $0 \leq k \leq n$ について $\partial^{(0,k)} f$ と $\partial^{(\infty,k)} f$ が存在して一致する. 但し

$$\partial^{(\alpha,k)} f := \lim_{\xi \rightarrow \alpha} f(x_1, \dots, x_{n-k}, \xi x_{n-k+1}, \dots, \xi x_n) \quad (\alpha = 0, \infty).$$

- (iv) $n \geq 3$ なら次の wheel condition を満たす:

$$f(z_1, q_1 z_1, q_1 q_2 z_1, z_4, \dots) = f(z_1, q_2 z_1, q_1 q_2 z_1, z_4, \dots) = 0.$$

最後に, 次数付きベクトル空間を $\mathcal{A} := \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}_n$ と定める. □

上の条件 (iii) を degenerate \mathbb{CP}^1 condition と呼びます*24. 条件 (i) と (ii) から \mathcal{A}_n の元 f は (n 変数対称多項式)/(差積の 2 乗) という形に書けます. 更に条件 (iii) から f の分子の対称多項式の次数が抑えられるので, \mathcal{A}_n は有限次元 F 線形空間であることが分かります. そのうち上記の条件を全て満たすものを計算機で調べてみると次のようになります:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_1 &= 1, \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_2 = 2, \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_3 = 3, \\ \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_4 &= 5, \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_5 = 7, \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_6 = 11, \dots \end{aligned}$$

これらは分割数に他なりません.

3.6.2 Shuffle 積と \mathcal{A} の構造定理

実は \mathcal{A}_n の基底を実験的に求めることが出来るのですが, n が増えるにつれてその式は複雑になります. それを統制するために, 次の演算を \mathcal{A}_n 達の上に導入します.

定義 3.22. $f \in \mathcal{A}_n$ と $g \in \mathcal{A}_m$ に対し Shuffle 積 $*$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} (f * g)(z_1, \dots, z_{n+m}) \\ := \text{Sym} \left(f(z_1, \dots, z_n) g(z_{n+1}, \dots, z_{n+m}) \prod_{\substack{1 \leq \alpha \leq n \\ n+1 \leq \beta \leq n+m}} \omega(z_\alpha, z_\beta) \right). \end{aligned}$$

但し Sym は対称化, ω は次の有理式:

$$\omega(z_\alpha, z_\beta; q_1, q_2, q_3) := \frac{(z_\alpha - q_1 z_\beta)(z_\alpha - q_2 z_\beta)(z_\alpha - q_3 z_\beta)}{(z_\alpha - z_\beta)^3}. \quad (3.14)$$

□

すると次の定理が成り立ちます*25:

定理 3.23. (1) Shuffle 積 $*$ は \mathcal{A} の中で閉じている.

(2) $(\mathcal{A}, *)$ は F 上の単位かつ結合的代数. (3) $(\mathcal{A}, *)$ は可換である.

(4) $\dim_F \mathcal{A}_n$ は n の分割数に等しい. 更に基底として $\{\epsilon_\lambda(z; q_i) \mid \lambda \in \mathcal{P}\}$ ($i = 1, 2, 3$) が

*24 実は代数 \mathcal{A} の楕円函数版 $\tilde{\mathcal{A}}$ というのがあって, 楕円曲線上の $\tilde{\mathcal{A}}$ から曲線を退化させて \mathcal{A} を得ることができます. \mathcal{A} は楕円曲線のサイクルのうちの 1 つをピンチして得られる種数 0 の退化曲線の上の代数と考えるので, [FHHSY09] のタイトルに “algebra on degenerate \mathbb{CP}^1 ” という言葉が入っています. ここで書いた条件 (iii) はその退化操作で現れる条件です.

*25 “Feigin-Odesskii 代数” と呼ばれているものは複数あります. 通常は [F096] で導入された楕円函数体に属する対称函数のなす空間に Shuffle 積を入れたものを言います. 一連の “Feigin-Odesskii 代数” については [O02] を参照してください. 今回の Macdonald 差分作用素の研究に必要なのは楕円的ではなく有理的なものであり, また定理 3.23(3) で述べたような可換な代数です.

取れる. 但し

$$\begin{aligned}\epsilon_n(z; q_i) &:= \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{(z_k - q_i z_j)(z_k - q_i^{-1} z_j)}{(z_k - z_j)^2}, \\ \epsilon_\lambda(z; q_i) &:= (\epsilon_{\lambda_1}(\cdot; q_i) * \epsilon_{\lambda_2}(\cdot; q_i) * \cdots * \epsilon_{\lambda_\ell}(\cdot; q_i))(z).\end{aligned}\tag{3.15}$$

(1) と (2) は比較的容易. (3) と (4) を示すのに次節のような工夫が必要になります.

3.6.3 Gordon フィルトレーション

定義 3.24. n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ に対し, 特殊化写像 $\varphi_\lambda^{(q_i)} : \mathcal{A}_n \rightarrow F(y_1, \dots, y_\ell)$ を

$$\begin{aligned}f(x_1, \dots, x_n) \mapsto & f(y_1, q_i y_1, \dots, q_i^{\lambda_1 - 1} y_1, \\ & y_2, q_i y_2, \dots, q_i^{\lambda_2 - 1} y_2, \\ & \dots \\ & y_\ell, q_i y_\ell, \dots, q_i^{\lambda_\ell - 1} y_\ell)\end{aligned}\tag{3.16}$$

と定める. また次の部分空間を定義する.

$$\mathcal{A}_{n, \lambda}^{(q_i)} := \bigcap_{\mu \in \mathcal{P}_n, \mu \preceq \lambda} \ker \varphi_\mu^{(q_i)}.$$

但し \preceq はドミナンス半順序 (1.11). これで定義される \mathcal{A} のフィルトレーションを Gordon フィルトレーションと呼ぶ^{*26}. □

例 3.25. 特殊化写像 $\varphi_\lambda^{(q_i)}$ に現れる変数は, λ の Young 図形に変数を q シフトさせながら書き入れたものになっています. $\lambda = (4, 4, 2, 1, 1, 1)$ の場合の様子を図 9 に表しました.

Gordon フィルトレーションの定義は組み合わせ論的で, 初見では難しいのですが, 以下の例でフィルトレーションの様子が分かると思います.

例 3.26. この例では $q := q_1$ と略記します. $n \leq 5$ の範囲で \mathcal{A}_n とその中の Gordon フィルトレーションの様子を書き出してみましょう. 以下の $\langle \dots \rangle$ は F 上の基底の意味です.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= \mathcal{A}_{2, (2)}^{(q)} = \langle \epsilon_{(2)}(z; q), \epsilon_{(1,1)}(z; q) \rangle \supseteq \mathcal{A}_{2, (1,1)}^{(q)} = \ker \varphi_{(2)}^{(q)} = \langle \epsilon_{(2)}(z; q) \rangle. \\ \mathcal{A}_3 &= \mathcal{A}_{3, (3)}^{(q)} = \langle \epsilon_{(3)}(z; q), \epsilon_{(2,1)}(z; q), \epsilon_{(1,1,1)}(z; q) \rangle \\ &\supseteq \mathcal{A}_{3, (2,1)}^{(q)} = \ker \varphi_{(3)}^{(q)} = \langle \epsilon_{(3)}(z; q), \epsilon_{(2,1)}(z; q) \rangle \supseteq \mathcal{A}_{3, (1,1,1)}^{(q)} = \ker \varphi_{(2,1)}^{(q)} = \langle \epsilon_{(3)} \rangle.\end{aligned}$$

^{*26} ここに現れる特殊化写像 $\varphi_\lambda^{(q_i)}$ は, 対称関数や量子群の様々な文脈で現れる q シフトを利用した特殊化にならって導入してあります. Macdonald 対称多項式に関する研究では, 例えば [KoNS09] において同種の特化が用いられています.

y_1	$q_1 y_1$	$q_1^2 y_1$	$q_1^3 y_1$
y_2	$q_1 y_2$	$q_1^2 y_2$	$q_1^3 y_2$
y_3	$q_1 y_3$		
y_4			
y_5			
y_6			

図9 $\lambda = (4, 4, 2, 1, 1, 1)$ に対する特殊化写像 $\varphi_\lambda^{(q_1)}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_4 &= \mathcal{A}_{4,(4)}^{(q)} = \langle \epsilon_{(4)}, \epsilon_{(3,1)}, \epsilon_{(2,2)}, \epsilon_{(2,1,1)}, \epsilon_{(1,1,1,1)} \rangle \\
&\supseteq \mathcal{A}_{4,(3,1)}^{(q)} = \ker \varphi_{(4)}^{(q)} = \langle \epsilon_{(4)}, \epsilon_{(3,1)}, \epsilon_{(2,2)}, \epsilon_{(2,1,1)} \rangle \\
&\supseteq \mathcal{A}_{4,(2,2)}^{(q)} = \ker \varphi_{(3,1)}^{(q)} = \langle \epsilon_{(4)}, \epsilon_{(3,1)}, \epsilon_{(2,2)} \rangle \\
&\supseteq \mathcal{A}_{4,(2,1,1)}^{(q)} = \ker \varphi_{(2,2)}^{(q)} = \langle \epsilon_{(4)}, \epsilon_{(3,1)} \rangle \\
&\supseteq \mathcal{A}_{4,(1,1,1,1)}^{(q)} = \ker \varphi_{(2,1,1)}^{(q)} = \langle \epsilon_{(4)} \rangle. \\
\mathcal{A}_5 &= \mathcal{A}_{5,(5)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{5,(4,1)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{5,(3,2)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{5,(3,1^2)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{5,(2^2,1)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{5,(2,1^3)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{5,(1^5)}^{(q)}.
\end{aligned}$$

以上の例ではフィルトレーションは全順序で並んでいて、隣同士のフィルトレーションの次元の差は1になっています。しかし $n = 6$ になると事情が変わります:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_6 &= \mathcal{A}_{6,(6)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{6,(5,1)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{6,(4,2)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{6,(4,1^2)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{6,(3,2,1)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{6,(3,1^3)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{6,(2^2,1^2)}^{(q)} \\
&\supseteq \mathcal{A}_{6,(3^2)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{6,(2,1^4)}^{(q)} \supseteq \mathcal{A}_{6,(1^6)}^{(q)}.
\end{aligned}$$

これは6の分割をドミナンス半順序(1.11)で並べたものと同じです:

$$(6) > (5, 1) > (4, 2) > (4, 1^2) > (3, 2, 1) > (3, 1^3) > (2^2, 1^2) > (2, 1^4) > (1^6). \\
&\quad \quad \quad > (3^2) > \quad \quad \quad > (2^3) >$$

また、各次元 $\dim_F \mathcal{A}_{6,\lambda}^{(q)}$ の様子は以下ようになります:

$$11 \quad 10 \quad 9 \quad \frac{7}{7} \quad 6 \quad \frac{4}{4} \quad 3 \quad 2 \quad 1. \tag{3.17}$$

□

定理3.23の証明で重要なのがフィルトレーションの次元の振舞いで、それから $\dim_F \mathcal{A}_n$ が上から抑えられます。一方で ϵ_λ と $\varphi_\mu^{(q_i)}$ の定義(3.15), (3.16)から $\dim_F \mathcal{A}_n$ が下から抑えられます。これで(4)が証明できます。(3)は ϵ_λ 達が*で可換である事から従います。

3.7 交叉空間と自由場表示

ここでは代数 \mathcal{A} を Macdonald 対称関数と結び付けます。しかし直ぐに差分作用素の自由場表示に移らずに、次の定理 3.27 から始めます。この節は [FHHSY09, §III] に従います。

3.7.1 交叉空間

Gordon フィルトレーション $\mathcal{A}_{n,\lambda}^{(q_i)}$ の定義 3.24 を思い出しましょう。これは $\mathcal{A} = \mathcal{A}(q_1, q_2, q_3)$ のパラメータ q_1, q_2, q_3 のうち 1 つを取って定義されるものでした。そこで違うパラメータに対応するフィルトレーションの関係が気になります。

定理 3.27. \mathcal{A} の定義において $q_1 = q^{-1} \in \mathbb{C}$, $q_2 = t \in \mathbb{C}$, $F = \mathbb{C}$ と置き換える^{*27}。また

$$|q| < 1, \quad |t| > 1, \quad q^i t^j \neq 1 \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

という条件を置く。この時、 n の任意の分割 λ に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}_{n,\lambda}^{(q^{-1})} \cap \mathcal{A}_{n,\lambda'}^{(t)}) = 1 \quad (\lambda' \text{ は } \lambda \text{ の転置}). \quad \square$$

3.7.2 自由場表示と代数 \mathcal{A}

定理 3.27 を証明するには Macdonald 差分作用素と \mathcal{A} を結び付ける必要があります。そこで次の写像を考えます。頂点作用素 $\eta(z)$ (3.10) を思い出しましょう。

定義 3.28. 頂点作用素 $\eta(z)$ と $C_n := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| = 1\}$ を用いて、 $f \in \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(q^{-1}, t)$ に対し $\mathcal{O}(f) \in \widehat{U}(\mathcal{H}_{q,t})$ を

$$\mathcal{O}(f) := \oint_{C_n} \left(\prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2\pi i z_j} \right) \frac{f(z_1, \dots, z_n)}{\prod_{k < \ell} \omega(z_k, z_\ell; q^{-1}, t, qt^{-1})} \eta(z_1) \cdots \eta(z_n).$$

で定める。これを更に線型に拡張して $\mathcal{O} : \mathcal{A} \rightarrow \widehat{U}(\mathcal{H}_{q,t})$ を定義する。 \square

実は \mathcal{A} 上の Shuffle 積の定義 3.22 は、 \mathcal{O} の準同型性を保証しています。

^{*27} この主張は \mathcal{A} の言葉だけで記述されていますが、その証明は今のところ自由場表示を経て Macdonald 対称関数の性質に帰着する方法しか知られていません。その為、係数体を \mathbb{C} にしています。

命題 3.29. (1) $\mathcal{O}(f * g) = \mathcal{O}(f)\mathcal{O}(g)$. (2) \mathcal{O} は単射.

(3) $\mathcal{O}(\epsilon_n(z; q^{-1})) = \widehat{E}_n$.

(4) $\mathcal{M} := \text{Im } \mathcal{O} (\cong \mathcal{A})$ として, $\mathcal{M} \cong \mathbb{C}[\widehat{E}_1, \widehat{E}_2, \dots]$.

特に任意の $f \in \mathcal{A}$ について $\mathcal{O}(f)$ は $P_\lambda(x; q, t)$ 達を固有函数に持つ. \square

この命題で \mathcal{A} と差分作用素の自由場表示の関係が明瞭になったのですが, 定理 3.27 を示すには, 事実 3.20 の差分作用素 $H_r^{(N)}$ の無限変数版 \widehat{G}_r が必要です.

定義 3.30. $\widehat{G}_r \in \widehat{U}(\mathcal{H}_{q,t})$ を次の式で定義する:

$$\widehat{G}_r := \frac{(-1)^r q^{\binom{r}{2}} [r]_q!}{(q; q)_r r!} \mathcal{O}(\epsilon_r(z; t)). \quad \square$$

命題 3.31. \widehat{G}_r は次の差分作用素 G_r の自由場表示である.

$$G_r P_\lambda(x; q, t) = P_\lambda(x; q, t) \cdot g_r(s^\lambda; q, t).$$

但し $g_r(y; q, t) := P_{(r)}(x; q, t) / \langle P_{(r)}(x; q, t), P_{(r)}(x; q, t) \rangle_{q,t}$. *28. \square

この命題の証明には, \widehat{E}_r と \widehat{G}_s が満たす次の Wronski 関係式*29 が必要です:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k (1 - q^k t^{n-k}) \widehat{E}_{n-k} \widehat{G}_k = 0.$$

以上の準備のもとで, 定理 3.27 は次のように精密化して示すことができます.

定理 3.32. 次を満たす $f_\mu \in \mathcal{A}_n(q^{-1}, t)$ が一意に存在し交叉空間 $\mathcal{A}_{n,\mu}^{(q^{-1})} \cap \mathcal{A}_{n,\mu'}^{(t)}$ を張る.

$$\mathcal{O}(f_\mu) P_\lambda(x; q, t) = P_\lambda(x; q, t) \cdot P_\mu(s_\lambda; q, t).$$

但し $s_\lambda := (q^{\lambda_1} t^{-1}, q^{\lambda_2} t^{-2}, q^{\lambda_3} t^{-3}, \dots)$ はスペクトルパラメータ (3.9). \square

*28 差分作用素 G_r は有限変数の差分作用素 $G_r^{(N)}$ を用いて $G_r := \varprojlim_n G_r^{(N)}$ と実現できます. 但し

$$G_r^{(N)} := \frac{t^{-rN} q^{\binom{r}{2}}}{(-1)^r (q; q)_r} \sum_{k=0}^r (-1)^k q^{-\binom{k}{2}} q^{-k(r-k)} (q^{r-k+1}; q)_k H_k^{(N)}.$$

であり, $H_k^{(N)}$ は事実 3.20 の差分作用素です.

*29 古典的な Wronski 関係式とは, 基本対称函数 $e_r(x)$ と完全対称函数 $h_s(x)$ の間の関係式 $\sum_{i=0}^n (-1)^i e_{n-i}(x) h_i(x) = 0$ の事です. ここで書いたのはその q, t 変形 $\sum_{k=0}^n (-1)^k (1 - q^k t^{n-k}) e_{n-k}(x) g_k(x; q, t) = 0$ の作用素版です.

3.8 この節のまとめ

- この節では対称関数環上の内積を 2 パラメータに変形した $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q,t}$ を考え、それに関する直交関数系として Macdonald 対称関数を導入しました.
- Macdonald 対称関数は変形 Virasoro 代数の特異ベクトルの自由場表示に現れることを紹介しました.
- 有限変数版である Macdonald 対称多項式が可換な差分作用素族の同時固有関数になっていることを紹介しました.
- 対称関数環に作用する可換な差分作用素族を, Feigin-Odesskii 代数 \mathcal{A} と頂点作用素 η を用いて構成しました.

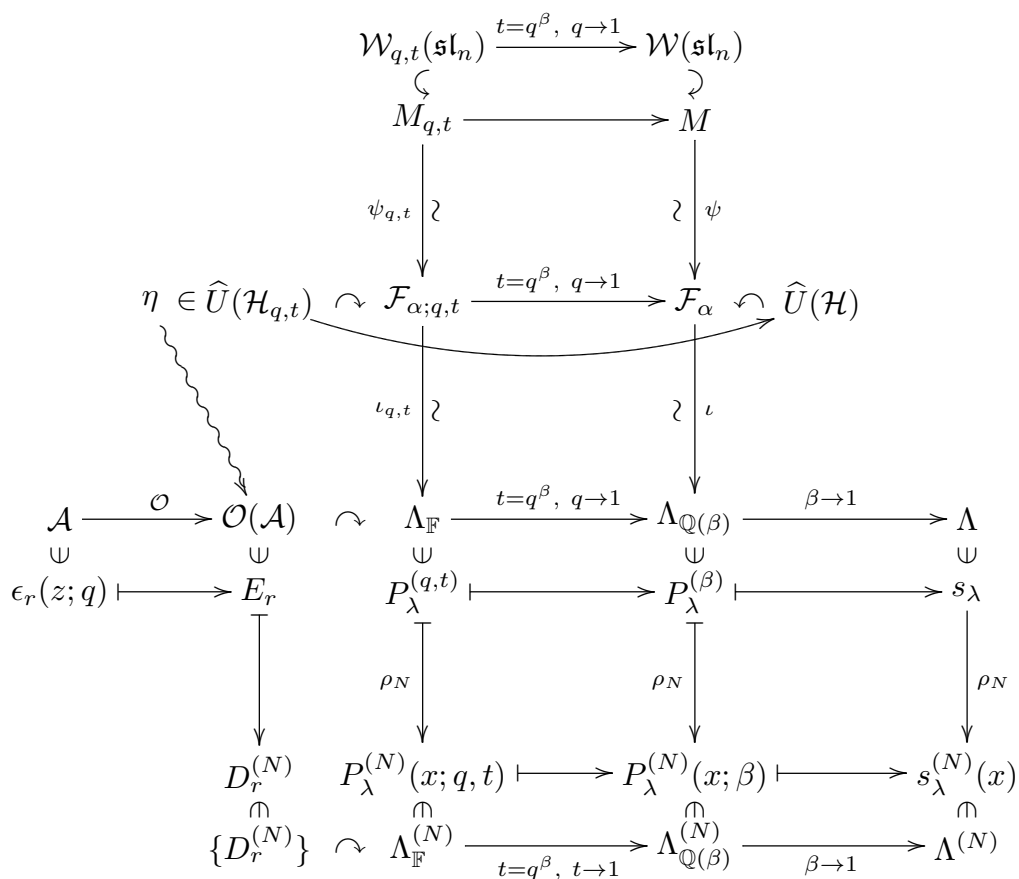


図 10 §3 のまとめ

4 Ding-lohara 代数とその変形 W 代数との関係

Macdonald 対称函数並びに差分作用素の自由場表示の関係を一通り記述することができました. しかし, 疑問が幾つか残ります:

- 写像 \mathcal{O} の定義 3.28 に現れた頂点作用素 $\eta(z)$ は例 3.18 の脚注で述べたように, 古典的な^{*30}頂点作用素の q, t 変形と思える. すると, $\eta(z)$ の背後には Yangian や量子アファイン代数のような Hopf 代数があると期待できないか?
- 特異ベクトルの自由場表示として Macdonald 対称函数を見る場合, 変形 W 代数 $\mathcal{W}_{q,t}(\mathfrak{sl}_n)$ の n を変えないと一般の分割に対応する対称函数が表せない.

それに対する答えが Ding-lohara の導入した Hopf 代数 [DI97] にあります. 以下ではこの話題を紹介します. 内容は [FHHSY09, §III.F, Appendix] 及び [FHSSY10] に従います.

4.1 Ding-lohara 代数 $\mathcal{U}_{q,t}(\mathfrak{sl}_2)$ の定義

この節では $q^{1/4}, t^{1/4}$ を不定元とし, $\mathbb{Q}(q^{1/4}, t^{1/4})$ 上の線形空間ないし代数を考えます.

定義 4.1. $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{q,t}(\mathfrak{sl}_2)$ を次の様に定義される結合代数とする.

$$\text{生成元: } x^\pm(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n^\pm z^{-n}, \quad \psi^\pm(z) = \sum_{\pm n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \psi_n^\pm z^{-n}, \quad \gamma^{\pm 1/2} \text{ (中心元)}$$

$$\text{関係式: } \psi^\pm(z)\psi^\pm(w) = \psi^\pm(w)\psi^\pm(z), \quad \psi^+(z)\psi^-(w) = \frac{g(\gamma^{+1}w/z)}{g(\gamma^{-1}w/z)}\psi^-(w)\psi^+(z),$$

$$\psi^+(z)x^\pm(w) = g(\gamma^{\mp 1/2}w/z)^{\mp 1}x^\pm(w)\psi^+(z),$$

$$\psi^-(z)x^\pm(w) = g(\gamma^{\mp 1/2}z/w)^{\pm 1}x^\pm(w)\psi^-(z),$$

$$[x^+(z), x^-(w)] = \frac{(1-q)(1-1/t)}{1-q/t} \\ \times \left(\delta(\gamma^{-1}z/w)\psi^+(\gamma^{1/2}w) - \delta(\gamma z/w)\psi^-(\gamma^{-1/2}w) \right),$$

$$G^\mp(z/w)x^\pm(z)x^\pm(w) = G^\pm(z/w)x^\pm(w)x^\pm(z).$$

但し $g(z) := \frac{G^+(z)}{G^-(z)}$, $G^\pm(z) := (1 - q^{\pm 1}z)(1 - t^{\mp 1}z)(1 - q^{\mp 1}t^{\pm 1}z)$. □

^{*30} q, t を含まない Heisenberg 代数に関する, という意味

Ding と Iohara [DI97] により次のことが知られています*31.

事実 4.2. \mathcal{U} には (formal な) Hopf 代数の構造が入る. □

ここでは余積 Δ だけを明記します:

$$\begin{aligned}\Delta(\gamma^{\pm 1/2}) &= \gamma^{\pm 1/2} \otimes \gamma^{\pm 1/2}, \\ \Delta(x^+(z)) &= x^+(z) \otimes 1 + \psi^-(\gamma_{(1)}^{1/2} z) \otimes x^+(\gamma_{(1)} z), \\ \Delta(x^-(z)) &= x^-(\gamma_{(2)} z) \otimes \psi^+(\gamma_{(2)}^{1/2} z) + 1 \otimes x^-(z), \\ \Delta(\psi^\pm(z)) &= \psi^\pm(\gamma_{(2)}^{\pm 1/2} z) \otimes \psi^\pm(\gamma_{(1)}^{\mp 1/2} z).\end{aligned}$$

但し $\gamma_{(1)}^{\pm 1/2} := \gamma^{\pm 1/2} \otimes 1$, $\gamma_{(2)}^{\pm 1/2} := 1 \otimes \gamma^{\pm 1/2}$.

4.2 テンソル表現と変形 W 代数

ここでは \mathcal{U} のレベル 1 表現 ρ_c のテンソル表現と変形 W 代数との関連を紹介します.

\mathcal{U} の表現は $\gamma^{\pm 1/2}$ が $(t/q)^{\pm k/4}$ で実現される時, レベル k と呼ばれます. 以下の命題は, 前節で用いた $\eta(z)$ が \mathcal{U} のレベル 1 表現と思えることを主張します.

命題 4.3. $\mathcal{F}_{q,t}$ を Heisenberg 代数 $\mathcal{H}_{q,t}$ の Fock 表現とする. $c \in \mathbb{Q}(q^{1/2}, t^{1/2}) \setminus \{0\}$ に対して, \mathcal{U} の $\mathcal{F}_{q,t}$ 上のレベル 1 表現 ρ_c が次で定まる:

$$\begin{aligned}\rho_c(\gamma^{\pm 1/2}) &= (t/q)^{\pm 1/4}, & \rho_c(\psi^\pm(z)) &= \varphi^\pm(z), \\ \rho_c(x^+(z)) &= c\eta(z), & \rho_c(x^-(z)) &= c^{-1}\xi(z).\end{aligned}$$

但し以下の頂点作用素を用いた:

$$\begin{aligned}\eta(z) &:= \circ \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\right) \circ, \\ \xi(z) &:= \exp\left(\sum_{n>0} \frac{t^{-n}-1}{n} (t/q)^{n/2} a_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} (t/q)^{n/2} a_n z^{-n}\right), \\ \varphi^+(z) &:= \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} (1-(t/q)^n) (t/q)^{-n/4} a_n z^{-n}\right), \\ \varphi^-(z) &:= \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} (1-(t/q)^n) (t/q)^{-n/4} a_{-n} z^n\right).\end{aligned}$$

□

*31 Ding-Iohara は元々量子アフィン環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の Drinfeld 実現を変形して, Hopf 代数 $U_q(g, \mathfrak{sl}_n)$ を作った. ここで $g = \{g_{i,j}(z) \mid 1 \leq i, j \leq n-1\}$ は $g_{i,j}(z) = g_{i,j}(z^{-1})^{-1}$ を満たす解析関数. 本稿で扱うのは \mathfrak{sl}_2 の場合で g が上記のもの.

定義 4.4. (1) n 階余積 $\Delta^{(n)}$ を次のように帰納的に定義する:

$$\Delta^{(2)} := \Delta, \quad \Delta^{(n)} := (\text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta^{(n-1)}.$$

更々にそれとレベル 1 表現の n 重テンソル表現 $\rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_n}$ の合成を $\rho_y^{(n)}$ と書く:

$$\rho_y^{(n)} := (\rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_n}) \circ \Delta^{(n)}.$$

(2) $\{b_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を, ψ^\pm の展開

$$\psi^+(z) = \psi_0^+ \exp\left(+ \sum_{n>0} b_n \gamma^{n/2} z^{-n}\right), \quad \psi^-(z) = \psi_0^- \exp\left(- \sum_{n>0} b_{-n} \gamma^{n/2} z^n\right)$$

で定義する^{*32}. これは次の交換関係を満たす.

$$[b_m, b_n] = \frac{1}{m} (1 - q^{-m})(1 - t^m)(1 - (q/t)^m)(\gamma^m - \gamma^{-m})\gamma^{-|m|} \delta_{m+n,0}.$$

(3) 次の U の元を導入する:

$$t(z) := \alpha(z)x^+(z)\beta(z).$$

但し

$$\alpha(z) := \exp\left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n} z^n}{\gamma^n - \gamma^{-n}}\right), \quad \beta(z) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n z^{-n}}{\gamma^n - \gamma^{-n}}\right).$$

(4) 最後に $\mathbb{Q}(q, t)$ 内の次の級数を導入する.

$$f_k(z) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^n)(1 - t^{-n})(1 - (q/t)^{(k-1)n})}{1 - (q/t)^{kn}} z^n\right). \quad \square$$

命題 4.5. $\rho_y^{(n)}(t(z)) = \sum_{i=1}^n y_i \Lambda_i(z)$ で $\{\Lambda_i(z) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ を定義すると, これらは $\mathcal{W}_{q,t}(\mathfrak{sl}_n)$ の関係式のうち知られているもの全て^{*33}を満たす. 特に

$$f_n(w/z)\Lambda_i(z)\Lambda_j(w) = \circ \Lambda_i(z)\Lambda_j(w) \circ \times \begin{cases} 1 & i = j, \\ \gamma_+(z, w; q, t) & i < j, \\ \gamma_-(z, w; q, t) & i > j. \end{cases}$$

但し $\gamma_\pm(z, w; q, t) := \frac{(z - q^{\mp 1}w)(z - qt^{\mp 1}w)}{(z - w)(z - t^{\mp 1}w)}$. □

^{*32} 本当は U の定義で ψ^\pm を使わずに $\{b_n\}$ を使えば論理的には明快になる.

^{*33} このような歯切れの悪い書き方をしているのは, 変形 \mathcal{W} 代数が頂点作用素のなす代数として定義されている ([AKOS96], [FFr96] を参照) ため, 関係式の full set が定義されていないことに起因します.

4.3 他の分野との関連

今回扱った Ding-lohara 代数 $\mathcal{U}_{q,t}(\mathfrak{sl}_2)$ は Macdonald 対称関数と量子代数の自由場表示との関連から [FHHSY09], [FHSSY10] で見出されました. しかし, 我々の研究とほぼ同時期に, 別の研究 [FT09], [ScV09], [FFJMM10], [Sc10] にも同じ代数が現れます. その事に触れて今回の話を終えたいと思います.

まず [FT09] では平面の Hilbert スキーム $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ 上への $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^2$ の自然な作用を考え, \mathbb{T} 同変 K 群の局所化の無限直和

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} K^{\mathbb{T}}(\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)) \otimes_{K^{\mathbb{T}}(\text{pt})} \text{Frac}(K^{\mathbb{T}}(\text{pt}))$$

上に Ding-lohara 代数と Feigin-Odesskii 代数 $\tilde{\mathcal{A}}^{*34}$ の作用を (幾何学的に) 決めました. その結果, 上の空間を Fock 空間 $\mathcal{F}_{q,t}$ と同一視した時に, $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ の固定点のクラスが Macdonald 対称関数の自由場表示に対応することを示されました.

次に [ScV09], [Sc10] では楕円 Hall 代数 \mathcal{E}_X と Ding-lohara 代数並びに Feigin-Odesskii 代数の関係が論じられました. 有限体 \mathbb{F}_q 上の楕円曲線 X に対し, \mathcal{E}_X は組み合わせ論的に定義されます. 少し準備をします.

- $\sigma, \bar{\sigma}$ を X の Weil 数, つまり $H^1(\bar{X}, \bar{\mathbb{F}}_q)$ の Frobenius 固有値とする.
- $(\mathbb{Z}^2)^* := \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ とする.
- $x = (p, q) \in (\mathbb{Z}^2)^*$ に対し $\det(x) := \gcd(p, q) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と定める.
- また平行でない^{*35} $x, y \in (\mathbb{Z}^2)^*$ に対し $\epsilon_{x,y} := \text{sign}(\det(x, y)) \in \{\pm 1\}$ とする.
- 最後に $\Delta_{x,y}$ を $\{(0, 0), x, x + y\}$ で張られる \mathbb{Z}^2 内の三角形とする.

この時 \mathcal{E}_X は以下で定まる \mathbb{C} 代数です:

生成元: $\{u_x \mid x \in (\mathbb{Z}^2)^*\}$

関係式: i) x, x' が平行な時は $[u_x, u_{x'}] = 0$,

ii) $x, y \in (\mathbb{Z}^2)^*$ が $\det(x) = 1$ かつ $\Delta(x, y)$ 内に格子点を含まない時

$$[u_y, u_x] = \epsilon_{x,y} \frac{\theta_{x+y}}{\alpha_1}.$$

但し θ_z ($z \in (\mathbb{Z}^2)^*$) は $\sum_i \theta_{ix_0} s^i = \exp(\sum_{r \geq 1} \alpha_r u_{rx_0} s^r)$ で定める.

^{*34} 我々の \mathcal{A} より少し大きい代数ですが, Shuffle 積の定義は同じです.

^{*35} x と y が $(0, 0)$ を通る同一直線上に並ばない, という意味.

$(x_0 \in (\mathbb{Z}^2)^*$ は $\deg(x_0) = 1$ を満たす任意の元.)

[ScV09] では以下の事が示されました.

- 任意の自然数 N に対して, 2重アファイン Hecke 環 (DAHA と呼ばれる) \ddot{H}_N へ \mathcal{E}_X から全射が作れる.
- $\mathcal{E}_X^>$ を $\{u_{1,l} \mid l \in \mathbb{Z}\}$ で生成される \mathcal{E}_X の部分代数とする. また Shuffle 積 $*$ で現れた ω 定義 (3.14) で $q_1 = \sigma, q_2 = \bar{\sigma}$ として代数 $(\tilde{\mathcal{A}}, *)$ を定める. すると $\mathcal{E}_X^>$ と $(\tilde{\mathcal{A}}, *)$ は同型である.

この代数 \mathcal{E}_X は X 上の K 群に関する意味があります (Hall 代数という言葉はそこから来ています). 上の組み合わせ論的な定義だと $SL(2, \mathbb{Z})$ が自然に \mathcal{E}_X に作用しますが, X の幾何学的な言葉で言うと, これは導来圏 $D^b(\text{Coh}(X))$ 上の Fourier-Mukai 変換の作用です. また, [Sc10] では \mathcal{E} の “Drinfeld 表示” が得られましたから, これらのことは, 私たちの得た Ding-lohara 代数に $SL(2, \mathbb{Z})$ が作用していることを示唆しています.

最後に [FFJMM10] の仕事の紹介をします. そこでは $\mathcal{U}_{q,t}(\mathfrak{sl}_2)$ は “quantum continuous \mathfrak{gl}_∞ ” と呼ばれています. これは, 元来 KP 階層などのソリトン方程式の対称性に \mathfrak{gl}_∞ 代数が現れるのですが, そこに出てくる頂点作用素を変形したものが η だから, ということに由来しています. この論文では semi-infinite construction をつかって表現を構成し特にそのテンソル積表現の指標を調べると W 代数の指標が現れるという計算をしています.

以上で私の話はおしまいです. 今回は対称関数から話を始めて色々な量子代数との関連を述べてきました. 最後に Ding-lohara 代数が色々なところに顔を出すという話をしましたが, この代数は現在進展中の研究対象です. 一人でも多くの方に興味を持って頂けたらと思っています.

4.4 この節のまとめ

- Ding-lohara 代数 $\mathcal{U}_{q,t}(\mathfrak{sl}_2)$ を定義しました. これは量子アファイン環の Drinfeld 実現の変形と思えます.
- $\mathcal{U}_{q,t}(\mathfrak{sl}_2)$ のレベル 1 表現の n 階テンソル積表現を考えることで, 変形 W 代数 $\mathcal{W}_{q,t}(\mathfrak{sl}_n)$ が実現できそうである, ということを述べました.
- 最後に $\mathcal{U}_{q,t}(\mathfrak{sl}_2)$ が他の研究にも表れていることを紹介しました.

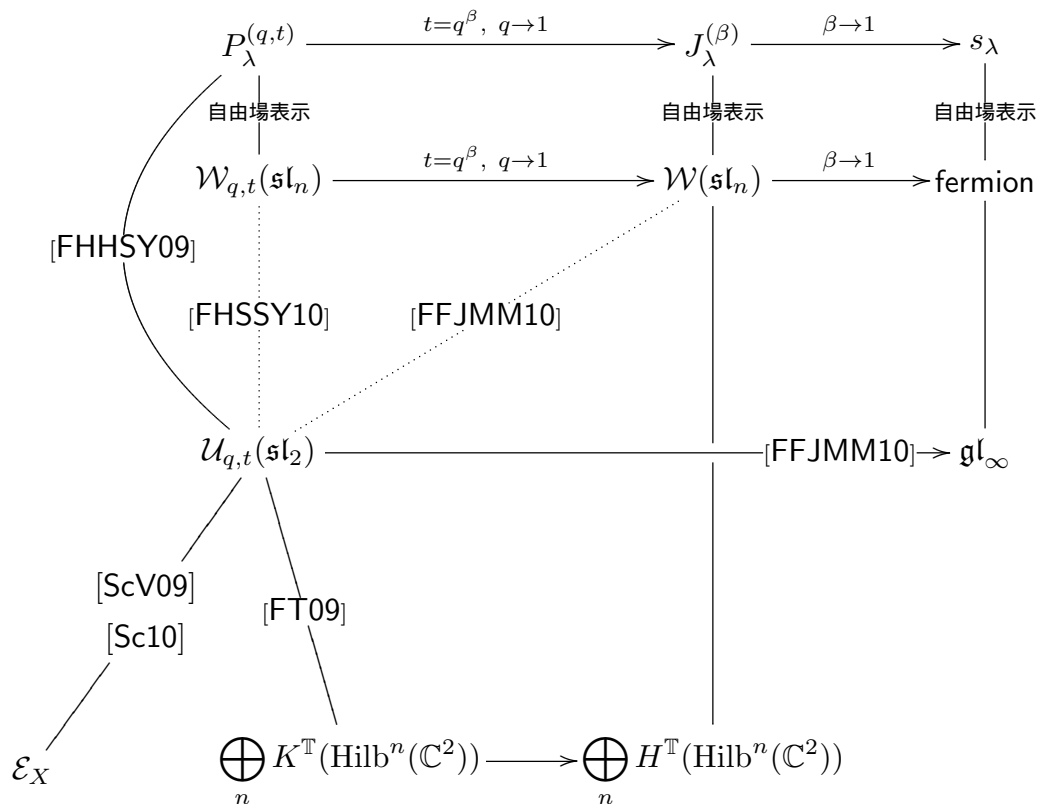


図 11 §4 のまとめ

参考文献

- [AKOS96] H. Awata, H. Kubo, S. Odake, J. Shiraishi, *Quantum \mathcal{W}_N algebras and Macdonald polynomials*, Comm. Math. Phys. **179** (1996), no. 2, 401–416.
- [AMOS95] H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake, J. Shiraishi, *Excited states of the Calogero-Sutherland model and singular vectors of the W_N algebra*, Nucl. Phys. B **449**, 347–374 (1995).
- [BP98] P. Bouwknegt, K. Pilch, *The deformed Virasoro algebra at roots of unity*, Comm. Math. Phys. **196** (1998), no. 2, 249–288.
- [DI97] J. Ding, K. Iohara, *Generalization of Drinfeld quantum affine algebras*, Lett. Math. Phys. **41** (1997), no. 2, 181–193.
- [FF82] B. Feigin, D. Fuchs, *Skew-symmetric invariant differential operators on the line and Verma modules over the Virasoro algebra*, Funct. Anal. Appl. **16**, 47–63, 96 (1982).
- [FFJMM10] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, *Quantum continuous \mathfrak{gl}_∞* , arXiv:1002.3100; arXiv:1002.3113.

- [FFr96] B. Feigin and E. Frenkel, *Quantum \mathcal{W} -Algebras and Elliptic Algebras*, *Comm. Math. Phys.* **178** (1996) 653–678.
- [FHHSY09] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida, *A commutative algebra on degenerate \mathbb{CP}^1 and Macdonald polynomials*, *J. Math. Phys.* **50** (2009), no. 9, 095215.
- [FHSSY10] B. Feigin, A. Hoshino, J. Shibahara, J. Shiraishi, S. Yanagida, *Kernel function and quantum algebras*, *数理解析研究所講究録* **1689** (2010) 133–152.
- [FO96] B. Feigin, A. Odesskii, *A family of elliptic algebras*, *IMRN* **11** (1997), 531–539.
- [FT09] B. Feigin, A. Tsymbaliuk, *Heisenberg action in the equivariant K -theory of Hilbert schemes via Shuffle Algebra*, arXiv:0904.1679.
- [Jin94] N. Jing, *q -Hypergeometric Series and Macdonald Functions*, *J. Algebraic Combin.* **3**, (1994), 291–305.
- [K79] V. Kac, *Contravariant form for infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras*, *Lect. Notes in Phys.* **94**, 441–445 (1979).
- [KaN03] Y. Kajihara, M. Noumi, *Multiple elliptic hypergeometric series. An approach from the Cauchy determinant*, *Indag. Math. (N.S.)* **14** (2003), no. 3-4, 395–421.
- [KoNS09] Y. Komori, M. Noumi, J. Shiraishi, *Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications* *SIGMA* **5** (2009), 054.
- [Mac95] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press (1995).
- [MY95] K. Mimachi, Y. Yamada, *Singular vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials*, *Commun. Math. Phys.* **174**, 447–455 (1995).
- [N10] 野海正敏, 2010年度数学会 無限可積分系セッション特別講演「可換差分作用素と核函数」無限可積分系のページ <http://www.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/~okado/infinite.html>.
- [O02] A. Odesskii, *Elliptic algebras* (Russian) *Uspekhi Mat. Nauk* **57** (2002), no. 6, 87–122; translation in *Russian Math. Surveys* **57** (2002), no. 6, 1127–1162.
- [SaSAFR05] Sakamoto, R., Shiraishi, J., Arnaudon, D., Frappat, L., Ragoucy, E.: Correspondence between conformal field theory and Calogero-Sutherland model. *Nucl. Phys. B* **704**, 490-509 (2005).
- [Sc10] O. Schiffmann, *Drinfeld realization of the elliptic Hall algebra*, arXiv:1004.2575.
- [ScV09] O. Schiffmann, E. Vasserot, *The elliptic Hall algebra and the equivariant K -theory of the Hilbert scheme of \mathbb{A}^2* , arXiv:0905.2555.
- [S03] 白石潤一, 量子可積分系入門 *Lectures on Quantum Integrable Systems*, SGC ライブラリ 28 サイエンス社 (2003).
- [S06] J. Shiraishi, *A Family of Integral Transformations and Basic Hypergeometric Series*, *Comm. Math. Phys.* **263** (2006), 439–460.
- [SKAO96] J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata, S. Odake, *A quantum deformation of the Virasoro algebra and the Macdonald symmetric functions*, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), no. 1, 33–51.