現代数学基礎 CⅢ　期末試験解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

問題 1–4 は全て解答せよ.

問題 1. $a \in \mathbb{C}$ とする. 関数 $f(z) := \frac{\cot z}{z-a}$ の全ての孤立特異点を求め, 除去可能な特異点, 極, 真性特異点のいずれであるかを判定し, 極の場合はその位数と留数を求めよ.

解答.
(i) $a \notin \mathbb{Z}\pi/2$ なら $z = a$ 及び $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ が 1 位の極. $\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \cot a$, $\mathrm{Res}_{z=n\pi} f(z) = \lim_{z\to n\pi} \frac{\cos z}{z-a}\frac{z-n\pi}{\sin z} = (n\pi - a)^{-1}$.
(ii) $a = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ なら, $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{m\})$ が 1 位の極, $z = a = m\pi$ が 2 位の極. 留数はそれぞれ $(n-m)^{-1}\pi^{-1}$ 及び 0.
(iii) $a = (m + \frac{1}{2})\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ なら, $z = a$ は除去可能な特異点で, $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ が 1 位の極. 留数は (i) と同じ.

コメント. 場合分けで 5 点, (i) は 5 点, (ii) は 10 点, (iii) は 5 点としました. 平均点は 17.3 点でした.

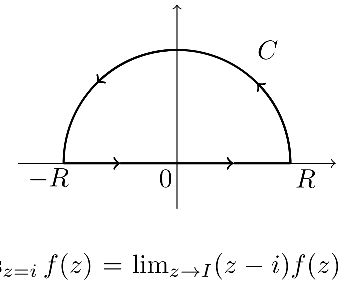
問題 2. 領域 $D := \mathbb{C} \setminus \{1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}\}$ において, $f(z) := (z^3 - 1)^{-1}$ の原始関数, つまり D 上の正則関数 $g(z)$ であって $g'(z) = f(z)$ となるものが存在するか否かを論じよ.

解答. 存在しない. もし f の原始関数 g があれば, $z = 1$ 中心の十分半径の小さい円 C 上で $f(z)$ を積分すれば, C 上の任意の点 z_0 について, Cauchy の積分定理より $\int_C f(z)dz = g(z_0) - g(z_0) = 0$. 一方, $f(z)$ は $z = 1$ を 1 位の極にもつので, 留数定理より $\int_C f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi i/3 \neq 0$ となって矛盾する.

コメント. Cauchy の積分定理 (またはそれに類すること) を使うことを 10 点, 積分の計算が 0 でないことを示す部分を 15 点としました. 平均点は 5.5 点でした.

問題 3. R を $R > 0$ かつ $R \neq 1, 2, 3$ を満たす実数とする. 下図の積分路 C に関する次の複素積分を計算せよ.

$$\int_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)(z^2+9)}\,dz.$$



解答. 被積分関数を $f(z)$ と書く. $\mathrm{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to I}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(z^2+4)(z^2+9)} = 1/(48i)$. 同様に $\mathrm{Res}_{z=2i} f(z) = -1/(60i)$, $\mathrm{Res}_{z=3i} f(z) = 1/(240i)$. よって

[*1] 2020/01/30 版, ver. 0.1.

(i) $0 < R < 1$ なら $\int_C f(z)dz = 0$.
(ii) $1 < R < 2$ なら $\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \pi/24$.
(iii) $2 < R < 3$ なら $\int_C f(z)dz = 2\pi i(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=2i} f(z)) = \pi/120$.
(iv) $3 < R$ なら $\int_C f(z)dz = 2\pi i(\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=2i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=3i} f(z)) = \pi/60$.

コメント. 場合分けを 5 点, 各場合を 5 点としました. 平均点は 19.0 点でした.

問題 4. 次の等式を示せ. 但し a は $0 < a < 1$ なる実数する.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx \;=\; \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

解答. $0 < \varepsilon < 1 < R$ として, $\log\varepsilon$, $\log R$, $\log R + 2\pi i$, $\log\varepsilon + 2\pi i$ を頂点とする長方形の周 C 上で $f(z) := \frac{e^{az}}{1+e^z}$ を積分する. 留数定理より $\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\pi i} f(z) = -2\pi i e^{a\pi i}$. ここで $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ の極限を考えると,

$$\left|\int_{\log R}^{\log R+2\pi i} f(z)dz\right| \le 2\pi \frac{e^{a\log R}}{e^R - 1} \to 0,$$
$$\left|\int_{\log\varepsilon}^{\log\varepsilon+2\pi i} f(z)dz\right| \le 2\pi \frac{e^{a\log\varepsilon}}{1 - e^{\varepsilon}} \to 0.$$

また $\int_{\log\varepsilon+2\pi i}^{\log R+2\pi i} f(z)dz = e^{2a\pi i}\int_{\log\varepsilon}^{\log R} f(z)dz$ より $\int_C f(z)dz \to (1-e^{2a\pi i})\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i} - 1} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

コメント. 留数定理を使うところまでを 10 点, 極限の議論を 10 点, その他を 5 点としました. 平均点は 12.4 点でした.

この等式は 12/12 の講義で Γ 関数の関数等式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin\pi z$ を示すために用いたものでした (講義ノートの定理 10.2.1 の補題). $e^z = t$ と変数変換すると, 演習問題 8.6 に帰着されます.

<u>問題 5–7 は一問だけ選んで解答せよ.</u>

問題 5. ガンマ関数 $\Gamma(z)$ について以下の等式を証明せよ.
(1) $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\le 0}$ に対して $\Gamma(\overline{z}) = \overline{\Gamma(z)}$.
(2) $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して $|\Gamma(iy)|^2 = \pi/(y\sinh\pi y)$.

解答. (1) $f(z) := \overline{\Gamma(\overline{z})}$ は $D := \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ 上で正則で, $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ 上で $\Gamma(z)$ と一致するから, 一致の定理により D 上で $f(z) = \Gamma(z)$ となる. これから結論を得る.
(2) $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/(\sin\pi s)$ より $\Gamma(s)\Gamma(-s) = \pi/(-s\sin\pi s)$. これと (1) から

$$\Gamma(iy)\,\overline{\Gamma(iy)} \;=\; \Gamma(iy)\,\Gamma(-iy) \;=\; \frac{\pi}{-iy\sin i\pi y} \;=\; \frac{\pi}{y\sinh\pi y}.$$

コメント. (1) を 10 点, (2) を 15 点としました.

問題 6. Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)$ について以下の主張を示せ.

(1) $\{a_n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ と $\{b_n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ をともに有界な複素数列とする. このとき, $\mathrm{Re}\, s > 1$ なる $s \in \mathbb{C}$ に対して以下の両辺は絶対収束して, さらに等号が成立することを示せ.

$$\Big(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_l}{l^s}\Big)\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}, \quad c_n := \sum_{\substack{l,m\in\mathbb{Z}_{>0},\\ lm=n}} a_l b_m.$$

(2) 自然数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ の約数の数を $d(n)$ と表す. $\mathrm{Re}\, s > 1$ なる $s \in \mathbb{C}$ に対して次の等式を示せ.

$$\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}.$$

解答. (1) は左辺の各無限和が絶対収束することを示せばよい. (2) は (1) で $a_n = b_n = 1$ として, (1) の右辺が $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$ となることから従う.

コメント. (1) を 15 点, (2) を 10 点としました.

問題 7. Weierstrass のペー関数 $\wp(z)$ について, 偶数回微分 $\wp^{(2n)}(z)$ $(n \geq 1)$ は $\wp(z)$ の $n+1$ 次の多項式で, 奇数回微分 $\wp^{(2n+1)}(z)$ $(n \geq 1)$ は $\wp'(z) \times [\wp(z)$ の $n+1$ 次の多項式$]$ で表せることを示せ,

解答. 帰納法て示す.$\wp'(z)$ については自明. 微分方程式 $\wp'(z)^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$ を微分して $wp''(z) = 12\wp^2 - g_2$, $2n$ 回以下まで示せたとして, $\wp^{(2n)}(z) = R(\wp)$, R は多項式, と表すと $\wp^{(2n+1)}(z) = \wp' \cdot R'(\wp)$. 再び微分して $\wp^{(2n+2)}(z) = \wp'' \cdot R'(\wp) + (\wp')^2 R''(\wp) = (12\wp^2 - g_2)R'(\wp) + (4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3)R''(\wp)$. これも $\wp$ の多項式である.

コメント. 微分方程式が使えることに注目していれば 10 点, 残りの部分を 15 点としました.

選択問題の中では最も簡単なものですが, 解答した方は 0 名でした.

全体のコメント

各問 25 点満点, 計 125 点で採点しました. 平均点は 56.7 点でした.

初回の告知通り, 小テスト・演習・レポートの点数を x, 中間試験の点数を y, 期末試験の点数を z として

$$t := x + \max(y, z) \times 0.8 + z \times 0.2$$

で定めた t が総点数です. $t \geq 60$ なら単位を出します. 最終的な t と成績の分布は次の通りです.

成績	F	C	B	A	S
t	1–59	60–79	80–112	113–134	135–
人数	12	16	25	9	5

以上です.