現代数学基礎 CⅢ　01 月 23 日分演習問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

14　楕円関数 2

14.1　ペー関数の半周期での値

問題 14.1. 定理 14.1.1 の証明で「これから $e_1 \neq e_2 \neq e_3$ が従う」の部分および「e_i 達が $4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$ の解であることは直ちに従う」の部分を説明せよ．

問題 14.2. 以下の等式を示せ．

$$\begin{aligned}\wp(\omega_1/2) &= e_1 \pm ((e_1 - e_2)(e_1 - e_3))^{1/2}, \\ \wp(\omega_1/2 + \omega_2) &= e_1 \mp ((e_1 - e_2)(e_1 - e_3))^{1/2},\end{aligned}$$

14.3　Weierstrass のシグマ関数

問題 14.3. 補題 14.2.3, 即ち Weierstrass のシグマ関数に関する以下の主張を証明せよ．

(1) σ 関数は次式で与えられる．但し ${\prod'}_{m,n}$ は $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ にわたる積を表す．

$$\sigma(z) = z {\prod_{m,n}}' \left\{ \left(1 - \frac{z}{\Omega_{m,n}}\right) \exp\left(\frac{z}{\Omega_{m,n}} + \frac{z^2}{2\Omega_{m,n}^2}\right) \right\}.$$

(2) $\sigma(z)$ は $\Omega_{m,n}$ を 1 位の零点とする奇関数である．

14.4　Weierstrass の関数による楕円関数の表示

問題 14.4 (ツェータ関数による表示). $f(z)$ を周期 $2\omega_1, 2\omega_2$ の楕円関数とする．基本周期内の極を $a_1, \ldots, a_n$ とし, 各 a_i での Laurent 展開を

$$f(z) = \frac{c_{k,r_k}}{(z - a_k)^{r_k}} + \cdots + \frac{c_{k,1}}{z - a_k} + (\text{正則部分})$$

と書く．この時ある定数 $c \in \mathbb{C}$ が存在して, $f(z)$ は Weierstrass の ζ 関数を用いて次のように表せることを示せ．

$$f(z) = c + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{r_k} \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} c_{k,s} \zeta^{(s-1)}(z - a_k).$$

[*1] 2020/01/17, ver. 0.2.

問題 14.5 (シグマ関数による表示). $f(z)$ を周期 $2\omega_1, 2\omega_2$ の楕円関数とする. 基本周期内の零点を重複を込めて $a_1, \ldots, a_n$ とする.

(1) f の極の部分集合 $\{b_1, \ldots, b_n\}$ であって, 任意の極は何れかの b_j と周期格子 $2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}$ を法として合同であり, 更に $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ となるようなものが存在することを示せ[*2].

(2) ある定数 $c \in \mathbb{C}$ が存在して, 次の等式が成立することを示せ.

$$f(z) = c\prod_{r=1}^{n} \frac{\sigma(z - a_r)}{\sigma(z - b_r)}.$$

14.5 楕円積分

問題 14.6. 定理 14.7 の証明で省略した部分を補え. 特に

(1) 等式 (14.2) を確かめよ.

(2) 等式 (14.3) を確かめよ.

(3) 式 (14.1) の A_i 達を a_i 達で書き表し, 等式 (14.4) を確かめよ.

(4) 最後の「変数を元に戻すと結論を得る」の部分を確かめよ.

以上です.

[*2] ver. 0.2 で修正しました.