現代数学基礎 CⅢ 01 月 23 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

14 楕円関数 2

14.1 ペー関数の半周期での値

問題 14.1. 前半: $e_1 = e_2$ なら $\wp(z) - e_1$ が $\omega_2 \not\equiv \omega_1 \pmod{\Omega}$ を零点に持ってしまうので矛盾する.

後半: $z = \omega_j$ を代入すれば $\wp'(\omega_i) = 0$ となることから従う.

問題 14.2. 実は $\wp$ 関数の加法公式の別形 $\wp(z+w) + \wp(z) + \wp(w) = \frac{1}{4}\Bigl(\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}\Bigr)^2$ が成立する. よって $\wp(z+w) + \wp(z) + \wp(\omega_1) = \frac{1}{4}\Bigl(\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(\omega_1)}\Bigr)^2$. 一方 $\wp'(z)^2 = 4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$ なので $\wp(z+\omega_1) = \frac{(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)}{\wp(z)-e_1} - \wp(z) - e_1 = \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp(z)-e_1} + e_1$. $z = -\omega_1/2$ を代入して $\wp$ が偶関数であることから $\wp(\omega_1/2) = e_1 \pm ((e_1-e_2)(e_1-e_3))^{1/2}$.

同様に $\wp(z+\omega_2) = \frac{(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_3)}{\wp(z)-e_2} - \wp(z) - e_2$ が導けて, これに $\wp(\omega_1/2)$ を代入して後半の結果を得る.

14.3 Weierstrass のシグマ関数

問題 14.3. (1) $\zeta(z)$ の級数は広義絶対一様収束しているから項別積分できて, 積分定数を除いて $\sigma(z)$ が定まる. その定数は条件 $\lim_{z\to 0} \frac{\sigma(z)}{z} = 1$ より 0 だと分かる.

(2) (1) の無限積表示から明らか.

14.4 Weierstrass の関数による楕円関数の表示

問題 14.4. $F(z) := \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{r_k} \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} c_{k,s} \zeta^{(s-1)}(z-a_k)$ とする. 準周期性 $\zeta(z+2\omega_j) = \zeta(z) + 2\eta_j$ から $F(z+2\omega_1) - F(z) = \sum_{k=1}^{n} 2\eta_1 c_{k,1}$. しかし $\sum_{k=1}^{n} c_{k,1}$ は基本領域内の $f(z)$ の極における留数の総和だから, 定理 13.1.1 (3) より 0. 同様に $F(z+2\omega_2) = F(z)$ も示せるので, $f(z) - F(z)$ は二重周期関数. しかしこれは $F(z)$ の定義より極を持たないので, 楕円関数に関する Liouville の定理 13.1.1 (4) より定数. それを c とおけば結論が得られる.

問題 14.5. (1) D を f の基本領域とし, $b'_1, \ldots, b'_m$ を D にある f の極とする. D の境界に正の向き付けを入れたものを C とすると, 補題 13.1.3 から $\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} s_j b'_j$. 但し s_j は極 b'_j の位数. 一方, C の頂点を t, $t+2\omega_1$, $t+2\omega_2$, $t+2\omega_1+2\omega_2$ とすると, 部分積分と f の周期性から $\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\bigl(-2\omega_2[\mathrm{Log}\, f(z)]_t^{t+2\omega_1} + 2\omega_1[\mathrm{Log}\, f(z)]_t^{t+2\omega_2}\bigr) = 2k\omega_1 + 2l\omega_2$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ と書ける. そこで $b_1, \ldots, b_{n-1}$ を b'_1 が s_1 個, …, b'_{m-1} が s_{m-1} 個, b'_m が $s_m - 1$ 個となるように取り, $b_n := b'_m + 2k\omega_1 + 2l\omega_2$ と定めればよい.

[*1] 2020/01/16, ver. 0.1.

(2) $F(z) := \prod_{r=1}^{n} \frac{\sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_r)}$ とすると, これは $f(z)$ と同じ極と零点を持つ. すると準周期性と (1) から $F(z+2\omega_1) = F(z) \cdot \prod_{r=1}^{n} \frac{\exp(2\eta_1(z-a_r))}{\exp(2\eta_1(z-b_r))} = F(z) \cdot \exp(2\eta_1(\sum_r a_r - \sum_r b_r)) = F(z)$. 同様に $F(z+2\omega_2) = F(z)$. よって $f(z)/F(z)$ は極も零点も持たない楕円関数で, 楕円関数に関する Liouville の定理 13.1.1 (4) より定数.

14.5　楕円積分

問題 14.6. 略.

連絡事項

- 来週の期末試験の範囲は, 4 問 (中間試験と同じ範囲) + 選択 1 問 (中間試験以降の範囲から 3 問) で各 25 点, 計 125 点の予定です.
- 返却した 1/9 の小テストの点数の下に丸で囲ってある数字 t は, 中間試験の点数 x と 1/16 までの小テスト・演習発表・レポートの点数 y 及び期末試験の点数を z に対して

$$t := y + \max(x, z) \times 0.8 + z \times 0.2$$

で計算した総点数です. $t \geq 60$ なら単位を出す予定です. 現時点での t の分布は次の通りです.

t	1–39	40–59	60–84	85–109	110–
人数	12	18	21	12	4

以上です.