現代数学基礎 CIII　01 月 23 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

14　楕円関数 2

前回と同様, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ をみたすものとし, $2\omega_1$ と $2\omega_2$ を周期に持つ Weierstrass のペー関数を $\wp(z)$ と書く.

14.1　ペー関数の半周期での値

定理 14.1.1. $\omega_3 := -\omega_1 - \omega_2$ とおき, また $e_j := \wp(\omega_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ と定める. この時 e_i 達は互いに異なり, また次の 3 次方程式の解である.

$$4t^3 - g_2 t - g_3 \,=\, 0.$$

証明. $\wp'(z)$ が奇関数であることから $\wp'(\omega_1) = -\wp'(-\omega_1) = -\wp'(2\omega_1 - \omega_1) = -\wp'(\omega_1)$. 同様の議論から

$$\wp'(\omega_1) \,=\, \wp'(\omega_2) \,=\, \wp'(\omega_3) \,=\, 0.$$

$\wp'(z)$ は Ω の各点 $\Omega_{m,n}$ を 3 位の極に持つ楕円関数なので, 命題 13.1.2 より $\wp'(z)$ は基本領域内に 3 つの零点を持つ. よって $z \equiv \omega_1, \omega_2, \omega_3 \pmod{\Omega}$ となる点 z で零点は尽くされる.

次に関数 $\wp(z) - e_1$ を考える. $\wp'(\omega_1) = 0$ より $z = \omega_1$ はこの関数の 2 位以上の零点である. $\wp(z)$ は基本領域内に二つしか極を持たないので, 命題 13.1.2 よりこの関数の零点は $z \equiv \omega_1 \pmod{\Omega}$ で尽くされる. $\wp(z) - e_2$, $\wp(z) - e_3$ の零点も同様. これから $e_1 \neq e_2 \neq e_3$ が従う.

また $\wp(z)$ の満たす微分方程式 ${\wp'}^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$ から e_i 達が $4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$ の解であることは直ちに従う. □

上記の証明で「これから $e_1 \neq e_2 \neq e_3$ が従う」の部分および「e_i 達が $4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$ の解であることは直ちに従う」の部分は演習問題とする.

系.

$$e_1 + e_2 + e_3 \,=\, 0, \quad e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 \,=\, -g_2/4, \quad e_1 e_2 e_3 = g_3/4.$$

14.2　Weierstrass のツェータ関数

定義. $\zeta(z)$ を

$$\frac{d\zeta(z)}{dz} \,=\, -\wp(z), \quad \lim_{z \to 0}(\zeta(z) - z^{-1}) \,=\, 0$$

を満たす関数として定める. Riemann のゼータ関数と区別するために, この関数を **Weierstrass のツェータ関数**と呼ぶ.

[*1] 2020/01/22, ver. 0.3.

補題. $\zeta(z)$ は次のように書ける.

$$\zeta(z) \;=\; \frac{1}{z}+\sum_{m,n}{}' \left(\frac{1}{z-\Omega_{m,n}}+\frac{1}{\Omega_{m,n}}+\frac{z}{\Omega_{m,n}^2}\right).$$

証明. $\wp(z)-z^{-2}$ は (原点以外の) $\Omega_{m,n}$ の近傍を含まない領域上で一様収束するから項別積分できて

$$\zeta(z)-z^{-1} \;=\; -\int_0^z \left(\wp(z)-z^{-2}\right)dz \;=\; -\sum_{m,n}{}' \int_0^z \left(\frac{1}{z-\Omega_{m,n}}+\frac{1}{\Omega_{m,n}}+\frac{z}{\Omega_{m,n}^2}\right)dz.$$

これから結論の等式を得る. □

系. $\zeta(z)$ は z の奇関数.

命題 14.2.1 (ツェータ関数の準周期性). $\eta_j := \zeta(\omega_j)$ $(j=1,2)$ と定めると

$$\zeta(z+2\omega_j) \;=\; \zeta(z)+2\eta_j \quad (j=1,2).$$

証明. $\wp(z+2\omega_1)=\wp(z)$ を積分して $\zeta(z+2\omega_1)=\zeta(z)+2\eta_1$. 但し $2\eta_1$ は積分定数. あとは $z=-\omega_1$ を代入して $\zeta(z)$ が奇関数であることを用いれば良い. ω_2 についても同様. □

定理 14.2.2.

$$\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1 \;=\; \pi i/2.$$

証明. C を基本領域の境界を反時計回りに向き付けた積分路として $\int_C \zeta(z)dz$ を考える. $\zeta(z)$ は基本領域に 1 つ極を持ちその留数は 1 だから $\int_C \zeta(z)dz = 2\pi i$. 一方で積分を変形すると

$$\begin{aligned}\int_C \zeta(z)dz \;&=\; \int_t^{t+2\omega_1} \left(\zeta(z)-\zeta(z+2\omega_2)\right)dz - \int_t^{t+2\omega_2} \left(\zeta(z)-\zeta(z+2\omega_1)\right)dz \\ &=\; -2\eta_2 \int_t^{t+2\omega_1} dz + 2\eta_1 \int_t^{t+2\omega_2} dz.\end{aligned}$$

これから結論が得られる. □

14.3 Weierstrass のシグマ関数

定義. 関数 σ を次の二条件を満たすものとして定義し, **Weierstrass のシグマ関数**と呼ぶ.

$$\frac{d}{dz}\log\sigma(z) \;=\; \zeta(z), \quad \lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z} \;=\; 1.$$

次の補題の証明は演習問題とする.

補題 14.3.1. (1) σ 関数は次式で与えられる. 但し $\prod'_{m,n}$ は $(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$ にわたる積を表す.

$$\sigma(z) \;=\; z\prod_{m,n}{}' \left\{\left(1-\frac{z}{\Omega_{m,n}}\right)\exp\left(\frac{z}{\Omega_{m,n}}+\frac{z^2}{2\Omega_{m,n}^2}\right)\right\}.$$

(2) $\sigma(z)$ は $\Omega_{m,n}$ を 1 位の零点とする奇関数である.

定理 14.3.2 (Weierstrass のシグマ関数の準周期性).

$$\sigma(z+2\omega_1) \;=\; -e^{2\eta_1(z+\omega_2)}\sigma(z), \quad \sigma(z+2\omega_2) \;=\; -e^{2\eta_2(z+\omega_1)}\sigma(z).$$

証明. 命題 14.2.1 の $\zeta(z+2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1$ を積分して $\sigma(z+2\omega_1) = ce^{2\eta_1 z}\sigma(z)$. ここで $z = -\omega_1$ を代入し $\sigma(-\omega_1) = -\sigma(\omega_1)$ を用いると $\sigma(\omega_1) = -ce^{-2\eta_1\omega_1}\sigma(\omega_1)$ となり, 積分定数 c が $-e^{2\eta_1\omega_1}$ だと分かる. □

ここまで調べてきた関数 $\wp(z)$, $\zeta(z)$, $\sigma(z)$ は **Weierstrass の関数**と総称される. これらと対応する三角関数類似をまとめると以下のようになる.

Weierstrass の楕円関数	$\wp(z)$	$\zeta(z)$	$\sigma(z)$
三角関数	$1/\sin^2(z)$	$\cot(z)$	$\sin(z)$
有理関数	$1/z^2$	$1/z$	z

表 1　有理・三角・楕円関数

14.4　Weierstrass の関数による楕円関数の表示

命題 14.4.1. 楕円関数かつ偶関数である任意の複素関数 $\varphi(z)$ は同じ周期を持つ $\wp(z)$ の有理式で書ける. より具体的に述べると, $\varphi(z)$ の零点のある列 $\pm a_1, \ldots, \pm a_n$ と極の列 $b_1, \ldots, b_n$ およびある定数 $c \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\varphi(z) \;=\; c\prod_{r=1}^{n} \frac{\wp(z) - \wp(a_r)}{\wp(z) - \wp(b_r)}.$$

証明. 任意の基本領域 D に対して $D \cap (\{\pm a_1, \ldots, \pm a_r\} + \Omega)$ が D 内の重複込みの零点集合と一致するように a_i 達を取る. 同様に b_i たちを取ると, 関数 $\varphi(z)^{-1}\prod_{r=1}^{n}\frac{\wp(z)-\wp(a_r)}{\wp(z)-\wp(b_r)}$ は極を持たない楕円関数だから (整関数に関する) Liouville の定理より定数. この定数を c とすればよい. □

定理 14.4.2 (ペー関数による表示). 任意の楕円関数は同じ周期を持つ $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の有理式として書ける.

証明. 任意の楕円関数 $f(z)$ について $f(z) + f(-z)$ は楕円関数かつ偶関数なので, 上の命題 14.4.1 から有理式 $R_1(x)$ があって $f(z) + f(-z) = 2R_1(\wp(z))$. また $(f(z) - f(-z))/\wp'(z)$ も楕円関数かつ偶関数なので別の有理式 $R_2(x)$ があって $(f(z) - f(-z))/\wp'(z) = 2R_2(\wp(z))$. よって $f(z)$ は次のように書ける.

$$f(z) \;=\; R_1(\wp(z)) + \wp'(z)R_2(\wp(z)).$$

□

他にツェータ関数やシグマ関数を用いても任意の楕円関数を表すことができる. 演習問題を参照せよ.

14.5　楕円積分

定理 14.5.1. 4 次式 $f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$ は重根を持たないものとする. x_0 を $f(x)$ の根とし, 平方根の逆数の積分

$$z = \int_{x_0}^{x} f(t)^{-1/2}dt,$$

を考える. もし

$$g_2 := a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2, \quad g_3 := a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4$$

に対応した $\wp(z)$ が存在するなら, x を次のように $\wp(z)$ の有理関数で表せる.

$$x = x_0 + \frac{f'(x_0)}{4\wp(z) - f''(x_0)/6}.$$

証明. 一部計算を省略して述べる. 省略した部分は演習問題とする.

$f(t)$ を $t = x_0$ で Taylor 展開して係数 $A_0, \ldots, A_3$ を

$$f(t) \;=\; 4A_3(t-x_0) + 6A_2(t-x_0)^2 + 4A_1(t-x_0)^3 + A_0(t-x_0)^4 \tag{14.1}$$

とおく. $\tau := (t-x_0)^{-1}$, $\xi := (x-x_0)^{-1}$ とすると

$$z = \int_{\xi}^{\infty} (4A_3\tau^3 + 6A_2\tau^2 + 4A_1\tau + A_0)^{-1/2} d\tau. \tag{14.2}$$

仮定より $A_3 \neq 0$ であることに注意して, $\tau = A_3^{-1}(\sigma - A_2/2)$, $\xi = A_3^{-1}(s - A_2/2)$ と変数変換すると

$$z = \int_{s}^{\infty} \bigl(4\sigma^3 - (3A_2^2 - 4A_1A_3)\sigma - (2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2)\bigr)^{-1/2} d\sigma. \tag{14.3}$$

ここで次の等式 (14.4) に注意すると, 前回の問題 13.5 の結果が使えて $s = \wp(z)$ が分かる.

$$3A_2^2 - 4A_1A_3 = g_2, \quad 2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2 = g_3 \tag{14.4}$$

最後に $x = x_0 + A_3/(s - A_2/2)$ で変数を元に戻すと結論を得る. $\square$

以上です.