現代数学基礎 CⅢ　01 月 16 日分演習問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

13　楕円関数 1

13.1　二重周期関数

問題 13.1. 補題 13.1.3 を証明せよ: C を曲線とし, D をその内部とする. 但し C の向き付けは D が左側にあるものとする. f を $\overline{D}$ 上正則な関数とする. また ϕ を D 上有限個の極を持ちそれ以外は正則な関数であって, C 上正則でかつ零点ももたないとする. ϕ の D での零点を $a_1, a_2, \ldots$ とし, それらの重複度を $r_1, r_2, \ldots$ とする. ϕ の D での極を $b_1, b_2, \ldots$ とし, それらの位数を $s_1, s_2, \ldots$ とする. この時, 次の等式を示せ.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}dz = \sum_i r_i f(a_i) - \sum_j s_j f(b_j).$$

13.2　Weierstrass のペー関数

問題 13.2. 二重級数

$$\sum_{m,n}{}' \left(\frac{1}{(z-2m\omega_1-2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2} \right).$$

が極の近傍を除いて z に関して絶対一様収束することを確かめよ.

問題 13.3. 補題 13.2.1, 即ち以下の主張を示せ.

(1) $\wp'(z)$ は奇関数, $\wp(z)$ は偶関数.

(2) $\wp'(z+2\omega_1) = \wp'(z+2\omega_2) = \wp'(z)$.

(3) 得られた等式 $\wp'(z+2\omega_1) = \wp'(z)$ の両辺を積分して (1) を上手く用いることで $\wp(z+2\omega_1) = \wp(z)$ を導け. 同様に $\wp(z+2\omega_2) = \wp(z)$ を導け.

13.3　ペー関数が満たす微分方程式

問題 13.4. $\wp(z) - z^{-2} = \sum'_{m,n}\left((z-\Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2}\right)$ から以下の等式 (補題 13.3.1, 13.3.2) を導け.

(1)

$$\wp(z) - z^{-2} = \frac{1}{20}g_2 z^2 + \frac{1}{28}g_3 z^4 + O(z^6), \quad g_2 = 60\sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 = 140\sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-6}.$$

(2)

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3 = O(z^2).$$

[*1] 2019/04/21, ver. 0.1.

問題 13.5. $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ とする．次の積分で定まる ζ の関数 z を考える．

$$z(\zeta) := \int_\zeta^\infty (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-1/2} dt.$$

但し積分路は $4t^3 - g_2 t - g_3$ の零点をよけるものとする．更に $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ となるものが存在して，$\Omega_{m,n} := 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ と略記すると

$$g_2 = 60 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-6}$$

と書けると仮定する．この時，適当な $k, l \in \mathbb{Z}$ が存在して，関数 z は次のように書けることを示せ．

$$\zeta = \wp(z + \Omega_{k,l} | \omega_1, \omega_2).$$

問題 13.6. 問題 13.5 で $g_2 = 4, g_3 = 0$ とした次の積分を考える．

$$z(\zeta) := \int_\zeta^\infty (4t^3 - 4t^2)^{-1/2} dt.$$

この時 $\zeta = 1/\sin^2(z + \alpha)$ と書けることを示せ．なおこの場合は，$g_2 = 60 \sum'_{m,n} \Omega_{m,n}^{-4}$, $g_3 = 140 \sum'_{m,n} \Omega_{m,n}^{-6}$ となる ω_1, ω_2 を取って問題 13.5 の議論を適用することが**できない**場合なので注意すること．

13.4 ペー関数の加法定理

問題 13.7. 定理 13.4.1 (ペー関数の加法定理) の証明で，$u \not\equiv v \pmod{\Omega}$ の場合は連立方程式 (13.2) が A, B を一意に決定することを確認せよ．

レポート問題

レポート問題 13.1 (ペー関数の加法定理の別形と倍角公式). (1) Weierstrass のペー関数は次の等式を満たす

$$\wp(z + w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2 - \wp(z) - \wp(w). \tag{13.1}$$

このことを次の手順で示せ．

(i) 定理 13.4.1 の証明で関数 $\wp'(z) - (A\wp(z) + B)$ の代わりに関数 $f(z) := \wp'^2(z) - (A\wp(z) + B)^2$ を考えて，f が $z = u, v, -u - v$ を零点に持つことを示せ．

(ii) $\wp(z)$ の満たす微分方程式 (定理 13.3.3) を用いて f が次のように書き直せることを確認せよ．

$$f(z) = 4\wp^3(z) - A^2\wp^2(z) - (2AB + g_2)\wp(z) - (B^2 + g_3)$$

(iii) 以上より 3 次方程式 $4Z^3 - A^2Z^2 - (2AB + g_2)Z - (B^2 + g_3) = 0$ が解 $Z = \wp(u), \wp(v), \wp(-u-v) = \wp(u+v)$ を持つことが分かった．すると解と係数の関係から $\wp(u) + \wp(v) + \wp(u+v) = A^2/4$. A の値を講義ノートの連立方程式 (13.2) から求めて代入して，結論を得よ．

(2) (13.1) の極限を取って，$2z \notin \Omega$ なら次の等式が成立することを示せ．

$$\wp(2z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 - 2\wp(z).$$

以上です．