現代数学基礎 CⅢ　01 月 16 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

13　楕円関数 1

13.1　二重周期関数

問題 13.1. ϕ の零点 a_k では, $\phi(z) = (z-a_k)^{r_k}\psi_k(z)$ と書けば $f(z)\phi'(z)/\phi(z) = f(a_k)r_k(z-a_k)^{-1} +$ (正則部分) と書けるので, $\operatorname{Res}_{z=a_k} f(z)\phi'(z)/\phi(z) = r_k f(a_k)$. 同様に ϕ の極 b_k では $\operatorname{Res}_{z=b_k} f(z)\phi'(z)/\phi(z) = -s_k f(b_k)$. あとは留数定理より結論を得る.

13.2　Weierstrass のペー関数

問題 13.2. $(z-\omega)^{-2}-\omega^{-2} = O(\omega^{-3})$ より, $r>2$ なら $\sum'_{m,n}|\Omega_{m,n}|^{-r}$ が収束することを示せば十分. そのためには, $|\Omega_{m,n}| \sim |m|+|b|$ より, $\sum'_{m,n}(|m|+|n|)^{-r}$ が収束することを示せば十分. まず

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}(|m|+|n|)^{-r} \;=\; |n|^{-r} + 2\sum_{k>|n|}k^{-r} \;\le\; |n|^{-r} + C\,|n|^{r-1}$$

に注意する. 但し $C := 2/r$ とした. 従って

$$\sum_{m,n}{}'(|m|+|n|)^{-r} \;=\; \sum_{m}{}'|m|^{-r} + \sum_{n}{}'\sum_{m}(|m|+|n|)^{-r} \;\le\; \sum_{m}{}'|m|^{-r} + \sum_{n}{}'(|n|^{-r}+C\,|n|^{r-1}).$$

これは $r>2$ より有界である.

問題 13.3. (1) $\wp'(z) = -2\sum_{m,n}(z-\Omega_{m,n})^{-3}$ より

$$\wp'(-z) \;=\; -2\sum_{m,n}(-z-\Omega_{m,n})^{-3} \;=\; 2\sum_{m,n}(z+\Omega_{m,n})^{-3} \;=\; 2\sum_{m,n}(z-\Omega_{m,n})^{-3} \;=\; -\wp'(z).$$

但し 3 番目の等号で添え字 (m,n) を $(-m,-n)$ に置き換えて $\Omega_{-m,-n} = -\Omega_{m,n}$ を用いた. よって $\wp'(z)$ は奇関数. すると $\wp(z)$ は奇関数の積分だから偶関数.

(2) $\Omega_{m,n} - 2\omega_1 = \Omega_{m-1,n}$ に注意して

$$\wp'(z+2\omega_1) \;=\; -2\sum_{m,n}(z+2\omega_1-\Omega_{m,n})^{-3} \;=\; -2\sum_{m,n}(z-\Omega_{m-1,n})^{-3} \;=\; -2\sum_{m,n}(z-\Omega_{m,n})^{-3} \;=\; \wp'(z).$$

(3) (2) を積分して $\wp(z+2\omega_1)-\wp(z) = c$ は定数. $z=-\omega_1$ として $c = \wp(\omega_1)-\wp(-\omega_1)$ だが (1) より $c = \wp(\omega_1)-\wp(\omega_1) = 0$. $z = -\omega_2$ とすれば同様に $\wp(z+2\omega_2) = \wp(z)$ が分かる.

[*1] 2019/07/21, ver. 0.1.

13.3　ペー関数が満たす微分方程式

問題 13.4.　(1) 一般二項定理から

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2(1-z/\omega^2)^2} = \frac{1}{\omega^2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}\left(\frac{-z}{\omega^2}\right)^k = \frac{1}{\omega^2}\left(1+\frac{2z}{\omega^2}-\frac{3z^2}{\omega^4}+\frac{4z^3}{\omega^6}-\frac{5z^4}{\omega^8}+\cdots\right).$$

級数 $\wp(z)$ は広義一様収束するので, Weierstrass の二重級数定理が使えて, 無限和の順序が交換できる. このことと上の展開から結論が得られる. z の奇数次の項は $\Omega_{-m,-n} = -\Omega_{m,n}$ より消えることに注意する.

(2) $\wp(z) = z^{-2} + g_2z^2/20 + g_3z^4/28$ を 3 乗して

$$\wp^3(z) = z^{-6} + \frac{3}{20}g_2z^{-2} + \frac{3}{28}g_3 + O(z^2).$$

同様に $\wp'(z) = -2z^{-3} + g_2z/10 + g_3z^3/7$ から

$$\wp'^2(z) = 4z^{-6} - \frac{2}{5}g_2z^{-2} - \frac{4}{7}g_3 + O(z^2).$$

よって

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) = -g_2z^{-2} - g_3 + O(z^2).$$

問題 13.5. 両辺を z で微分することで $(d\zeta/dz)^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3$. これは Weierstrass の $\wp$ 関数 $\wp(z)$ の満たす微分方程式に他ならない. よって補題 13.3.4 より, もし $g_2 = 60\sum'_{m,n}\Omega_{m,n}^{-4}$, $g_3 = 140\sum'_{m,n}\Omega_{m,n}^{-6}$ と書けるなら, ζ は $\zeta = \wp(z+\alpha)$ と書ける. 但し α は積分定数. $\zeta\to\infty$ で $z\to 0$ となるから α は $\wp(z)$ の零点. よって $\alpha = \Omega_{k,l}$ と書ける.

問題 13.6. $z(\zeta)$ の定義式を微分して $(d\zeta/dz)^2 = 4(\zeta^3-\zeta^2)$. ここで $\zeta(z) = 1/\sin^2 u$ で $u = u(z)$ を定義する。$y(u) := 1/\sin^2 u$ が $(dy/du)^2 = 4(y^3-y^2)$ を満たすことから $(du/dz)^2 = 1$. よって積分定数 α を用いて $\zeta = 1/\sin^2 u = 1/\sin^2(\pm z+\alpha)$ と書ける。最後に $1/\sin^2 z$ が偶関数であることを用いて $\pm\alpha$ を α と書き直して結論を得る。

13.4　ペー関数の加法定理

問題 13.7. 連立方程式 (13.2) の行列表示を考えると, $u \not\equiv v \pmod{\Omega}$ なら小行列式が 0 でないことから結論が従う. 詳細は略す.

以上です.