現代数学基礎 CIII　01 月 16 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

13　楕円関数 1

今回は [SS, Chapter 9 §1] に基づいて楕円関数を扱う.

13.1　二重周期関数

定義. ω_1, ω_2 を 0 でない複素数であって $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ を満たすものとする. $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 f は

$$f(z+2\omega_1) = f(z), \quad f(z+2\omega_2) = f(z)$$

が (定義域上に z があれば) 常に成立する時, **周期** $2\omega_1, 2\omega_2$ **の二重周期関数** (doubly-periodic function) と呼ばれる. 定数関数でない二重周期関数を**楕円関数** (elliptic function) と呼ぶ.

以下, 二重周期関数と言ったら周期 $2\omega_1, 2\omega_2$ の二重周期関数のこととする.

定義. 二重周期関数 f の**周期格子** (period lattice) とは以下の $\mathbb{C}$ の部分集合のことである.

$$2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z} = \{2m\omega_1 + 2n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

注意. (1) 周期の定義から周期格子の任意の点 ω について $f(z+\omega) = f(z)$.

(2) 周期格子は (加法に関して) $\mathbb{C}$ の部分加群であり, また $\mathbb{C}$ の離散部分空間である. 格子 (lattice) という言葉はこの二つの性質を反映したもの.

定義. f を二重周期関数とする. 複素平面上の平行四辺形であって以下の二条件を満たすものを f の**基本領域** (fundamental region) と呼ぶ.

- 頂点がある $z \in \mathbb{C}$ を用いて $z, z+2\omega_1, z+2\omega_1+2\omega_2, z+2\omega_2$ と書ける.
- 周上に f の極が位置しない.

「楕円関数の理論は美しい」とよく言われるが, その理由の一つは, 基本的な性質が簡単な議論で明らかになるからである. 例えば

定理 13.1.1. f を二重周期関数とする.

(1) 一つの基本領域の中にある f の極の数は有限個.
(2) f が恒等的に 0 でなければ, 一つの基本領域の中にある f の零点の数は有限個.
(3) 一つの基本領域の中にある f の極での留数の総和は 0.
(4) 基本領域内に極を持たない f は定数 (**楕円関数に関する Liouville の定理**).

[*1] 2020/01/15, ver. 0.2.

証明. (1) Bolzano-Weierstrass の定理, 即ち ($\mathbb{R}^n$ 内の) 有界点列は収束部分列を持つことから, もし無限個の極が基本領域 D 内に存在すれば極限点が D 内にある. しかしそれは孤立していない特異点であるから真性特異点であり, 有理型函数であることと矛盾する.

(2) $1/f(z)$ に (1) を適用すればよい.

(3) 基本領域の頂点を $t, t+2\omega_1, t+2\omega_1+\omega_2, t+2\omega_2$ とする. この順番で頂点が反時計回りにあると仮定して構わない. C を基本領域の周で定まる反時計回りの積分路とする. 留数の総和は留数定理から

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_t^{t+2\omega_1} + \int_{t+2\omega_1}^{t+2\omega_1+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_1+2\omega_2}^{t+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_2}^{t}\right\} f(z)\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_1}\left(f(z)-f(z+2\omega_2)\right)\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_2}\left(f(z)-f(z+2\omega_1)\right)\,dz \\ &= 0-0 = 0.\end{aligned}$$

(4) 基本領域 D 内で極を持たなければ $f(z)$ は $\overline{D}$ の各点で解析的なので, $|f(z)|$ は有界閉集合 $\overline{D}$ 上連続. よって $|f(z)|$ は最大値を持ち, 特に有界. すると $\mathbb{C}$ 上で $|f(z)|$ は有界だから, (整関数に関する) Liouville の定理より $f(z)$ は定数.

□

命題 13.1.2. 楕円関数 f と $c \in \mathbb{C}$ について, 基本領域内の $f(z) = c$ の解の重複度込みの個数は c によらない.

証明のために補題を用意する.

補題 13.1.3. C を複素平面上の単純閉曲線とし, D をその内部とする. 但し C の向き付けは D が左側にあるようなもの (つまり正の向き付け) だとする. f を $\overline{D}$ 上の正則関数とし, φ を D 上有限個の極を持ちそれ以外は正則な関数とする. また φ は C 上正則でかつ零点ももたないと仮定する. この時,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz = \sum_{i\geq 1} r_i f(a_i) - \sum_{j\geq 1} s_j f(b_j)$$

となることを示せ. 但し φ の D での零点を $a_1, a_2, \ldots$ とし, それらの重複度を $r_1, r_2, \ldots$ とした. また φ の D での極を $b_1, b_2, \ldots$ とし, それらの位数を $s_1, s_2, \ldots$ とした.

この補題の証明は演習問題とする.

命題 13.1.2 の証明. g を閉積分路 C 上とその内部で正則な関数とし, 更に C 上零点を持たないと仮定する. 補題 13.1.3 を $\varphi := g$, $f(z) := 1$ に適用して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz = (\text{零点の重複度を込めた個数}) - (\text{極の位数の総和}).$$

特に $g(z) = f(z) - c$, C を基本領域の周とすることで

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-c}dz = (f(z)=c\text{ の解の個数}) - (f(z)\text{ の極の位数の総和}).$$

しかし $f(z)$ は楕円関数だから, $f(z+2\omega_1) = f(z+2\omega_2) = f(z)$ および $f'(z+2\omega_1) = f'(z+2\omega_2) = f'(z)$ が成立する. 定理 13.1.1 (3) と同様の議論によりこの積分が 0 になることが分かる. □

定義. 楕円関数 f について, $f(z) = c$ の基本領域内での解の個数を f の**位数** (order) と呼ぶ.

命題 13.1.2 で $c = 0$ とすれば, 楕円関数の位数は零点の重複度を込めた個数と等しいことが分かり, また命題の証明から, 極の位数の総和でもあることが分かる.

定理 13.1.4. 楕円関数の位数は 2 以上.

証明. 位数 1 の楕円関数があればそれは基本領域内に位数 1 の極を一つ持ち, その留数は 0 ではない. これは定理 13.1.1 (3), つまり留数の総和が 0 となることに矛盾する. □

この定理から最も簡単な楕円関数は位数 2 の楕円関数だと分かり, 次の二種類が考えられる.

- 基本領域に位数 2 の極を一つ持つもの.
- 基本領域に位数 1 の極を二つ持つもの.

次の副節で導入する **Weierstrass のペー関数**は前者の例である.

13.2 Weierstrass のペー関数

ω_1, ω_2 は 0 でない複素数であって ω_2/ω_1 が正の虚部を持つものとする. また $\sum'_{m,n}$ で $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ にわたる和を表す.

定義. 関数 $\wp(z) = \wp(z|\omega_1, \omega_2)$ を以下で定義する[*2].

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n}{}' \left(\frac{1}{(z - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right).$$

簡単のため $\Omega_{m,n} := 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ とおけば $\wp(z) = z^{-2} + \sum'_{m,n}\bigl((z - \Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2}\bigr)$ となる.

$|\Omega_{m,n}|$ が十分大きいような m, n に関しては $\wp(z)$ の和に現れる各項は $O(|\Omega_{m,n}|^{-3})$. これから実は級数 $\wp(z)$ は極の近傍を除いて z に関して絶対一様収束することが分かる (演習問題 12.2 参照). よって関数 $\wp$ は $\mathbb{C}$ 上 $z = \Omega_{m,n}$ を除いて正則である. そして $\Omega_{m,n}$ を 2 位の極に持つ.

$\wp$ が楕円関数であることを示そう. そのために $\wp$ の微分を考える. $\wp$ は一様収束級数で定まる有理型関数だから項別微分ができて, $\sum_{m,n} := \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty}$ と書くと

$$\wp'(z) = -2 \sum_{m,n} (z - \Omega_{m,n})^{-3}.$$

次の補題の証明は演習問題とする.

補題 13.2.1. (1) $\wp'$ は奇関数, $\wp$ は偶関数.

(2) $\wp'(z + 2\omega_1) = \wp'(z + 2\omega_2) = \wp'(z)$.

(3) $\wp(z + 2\omega_1) = \wp(z + 2\omega_2) = \wp(z)$.

最後の主張と $\wp$ が極以外の特異点を持たないことから

定理 13.2.2. $\wp(z)$ は $2\omega_1, 2\omega_2$ を周期とする楕円関数である. $\wp(z)$ を **Weierstrass のペー関数**と呼ぶ.

[*2] $\wp$ は「ペー」と読みます.

13.3 ペー関数が満たす微分方程式

$\wp(z)-z^{-2}$ は $\sum'_{m,n}\left((z-\Omega_{m,n})^{-2}-\Omega_{m,n}^{-2}\right)$ と等しいことから $z=0$ まわりで正則だと分かる. また補題 13.2.1 より偶関数である. $z=0$ での値は級数の形から 0. 従って以下のように Taylor 展開できる.

$$\wp(z)-z^{-2} \;=\; \frac{1}{20}g_2z^2+\frac{1}{28}g_3z^4+O(z^6)$$

次の補題は演習問題とする.

補題 13.3.1. 係数 g_2, g_3 が以下のように与えられることを示せ.

$$g_2 \;=\; 60{\sum_{m,n}}'\Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 \;=\; 140{\sum_{m,n}}'\Omega_{m,n}^{-6}.$$

これから以下の展開を得る.

$$\begin{aligned}\wp(z) \;&=\; z^{-2}+\frac{1}{20}g_2z^2+\frac{1}{28}g_3z^4+O(z^6),\\ \wp'(z) \;&=\; -2z^{-3}+\frac{1}{10}g_2z+\frac{1}{7}g_3z^3+O(z^5).\end{aligned}$$

次の補題も演習問題とする.

補題 13.3.2. 次の等式を確認せよ.

$$\wp'^2(z)-4\wp^3(z)+g_2\wp(z)+g_3=O(z^2).$$

従って関数 $\wp'^2(z)-4\wp^3(z)+g_2\wp(z)+g_3$ は原点 $z=0$ において正則である. $\wp$ が楕円関数だからこの関数も楕円関数で, $z=0$ と周期格子に関して合同な点 $z=\Omega_{m,n}$ でも正則である. 一方で $\wp(z)$ の定義からまたこの関数の極は $\Omega_{m,n}$ にしかありえない. 以上より $\wp'^2(z)-4\wp^3(z)+g_2\wp(z)+g_3$ は極を持たない楕円関数である. すると定理 13.1.1 (4) からこの関数は定数である. $z=0$ での値は 0 だから任意の $z\in\mathbb{C}$ について $\wp'^2(z)-4\wp^3(z)+g_2\wp(z)+g_3=0$ となる. 以上より

定理 13.3.3. Weierstrass のペー関数は次の微分方程式を満たす.

$$\wp'^2(z) \;=\; 4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3, \quad g_2 \;:=\; 60{\sum_{m,n}}'\Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 \;:=\; 140{\sum_{m,n}}'\Omega_{m,n}^{-6}.$$

逆に $g_2, g_3\in\mathbb{C}$ が与えられたとして, 関数 $y(z)$ に関する次の微分方程式を考える.

$$(y'(z))^2 \;=\; 4y^3(z)-g_2y(z)-g_3. \tag{13.1}$$

補題 13.3.4. もし $g_2=60\sum'_{m,n}\Omega_{m,n}^{-6}$, $g_3=140\sum'_{m,n}\Omega_{m,n}^{-6}$ と書ければ, この微分方程式の解は以下のように書ける.

$$y(z) \;=\; \wp(z+\alpha\,|\,\omega_1,\omega_2) \quad (\alpha \text{ は積分定数})$$

証明. $y=\wp(u)$ を満たす u が任意の $y\in\mathbb{C}$ について存在する. これから $y(z)=\wp(u)$ を満たす関数 $u=u(z)$ が定まる. y の満たす微分方程式から $(du/dz)^2=1$ が得られるので $u=\pm z+\alpha$ と書ける. $\wp(z)$ が偶関数なので $y=\wp(\pm z+\alpha)=\wp(z\pm\alpha)$ となり, $\pm\alpha$ を α に置きなおすことで結論が得られる. □

13.4　ペー関数の加法定理

定理 13.4.1 (ペー関数の加法定理)**.** $u+v+w=0$ なら

$$\begin{vmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

証明. $u, v \in \mathbb{C}$ として A, B に関する次の連立方程式を考える.

$$\wp'(u) = A\wp(u) + B, \quad \wp'(v) = A\wp(v) + B \tag{13.2}$$

この方程式は $\wp(u) \neq \wp(v)$ なら A, B を一意に決定する. つまり $u \not\equiv v \pmod{\Omega}$ なら A, B が決まる (この部分は演習問題とする). 以下 u, v はこの条件を満たしているものとし, A, B を上の方程式で決定したものとする. 次に関数

$$f(z) := \wp'(z) - A\wp(z) - B$$

を考える. この関数は Ω の各点 $\Omega_{m,n}$ を 3 位の極として持つ楕円関数である. 従って命題 13.1.2 よりこの関数は基本領域内に重複度を込めて 3 つの零点を持つ. この零点を a_1, a_2, a_3 と置く.

ここで補題 13.1.3 を, f は今考えている f, $\varphi(z) = z$, C を基本領域の周に適用する. 但し C は周期格子の一点 $\Omega_{m,n}$ のみを内部に含むものとする. 左辺の積分は命題 13.1.3 の証明と同じ議論で 0 になるので

$$0 = a_1 + a_2 + a_3 - 3\Omega_{m,n}.$$

つまり $a_1 + a_2 + a_3 \in \Omega$ だと分かる. 零点のうち二つは $\zeta = u, v$ だと分かるので, 残り一つを w とすれば $w \equiv -u-v \pmod{\Omega}$. よって $-u-v$ 自身も零点である. つまり

$$\wp'(-u-v) = A\wp(-u-v) + B.$$

これと (13.2) から結論が得られる. □

参考文献

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis Ⅱ, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅱ 複素解析**, 日本評論社 (2009).

以上です.