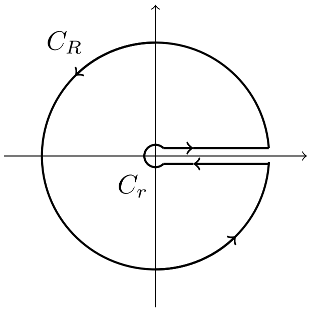
現代数学基礎 CⅢ　01 月 09 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

問題. 図の積分路 C での複素積分 $\int_C [(\operatorname{Log} z)^2/(1+z)^3]\, dz$ を利用して, 次の実積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3} dx.$$



解答. $f(z) := (\operatorname{Log} z)^2/(1+z)^3$ とする. C 内では f は $z=-1$ に 3 位の極を持つので

$$\int_C f(z)\, dz \;=\; 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) \;=\; 2\pi i\, \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} (\operatorname{Log} z)^2 \Big|_{z=-1} \;=\; 2\pi i\, \frac{1-\operatorname{Log} z}{z^2} \Big|_{z=-1} \;=\; 2\pi i (1-\pi i).$$

一方, 外側の円の半径を R, 内側の円の半径を r とすると, $R \gg 0$ および $r \ll 1$ で

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \le 2\pi R \sup_{|z|=R} \frac{|\operatorname{Log} z|^2}{|1+z|^3} \le 2\pi R \frac{(\log R)^2 + (2\pi)^2}{(R-1)^3},$$
$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \le 2\pi r \sup_{|z|=r} \frac{|\operatorname{Log} z|^2}{|1+z|^3} \le 2\pi r \frac{(\log r)^2 + (2\pi)^2}{(1-r)^3}$$

となるので, $R \to \infty$ および $r \to 0$ で両積分は 0 に収束する. よって同じ極限で

$$\int_C f(z)\, dz \longrightarrow \int_0^\infty \frac{(\log x)^2 - (\log x + 2\pi i)^2}{(1+x)^3} dx \;=\; \int_0^\infty \frac{-4\pi i \log x + 4\pi^2}{(1+x)^3} dx.$$

$\int_0^\infty (1+x)^{-3}\, dx = 1/2$ だから, 求める積分は

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3} dx \;=\; \frac{-1}{4\pi i} \Big(2\pi i (1-\pi i) - \frac{4\pi^2}{2} \Big) \;=\; -\frac{1}{2}.$$

コメント. 3 点満点で採点しました. 平均点は 0.8 点でした.

[*1] 2020/01/09, ver. 0.1.

連絡事項

期末試験の詳細は 1/23 にお伝えしますが, 4 問 (中間試験と同じ範囲) + 選択 1 問 (中間以降の範囲) で各 25 点, 計 125 点の予定です.

以上です.