現代数学基礎 CIII 01 月 09 日分演習問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

12 Riemann の写像定理

12.1 双正則写像

問題 12.1. 命題 12.1.1 の上半平面 $\mathbb{H}$ から単位円板 $\mathbb{D}$ への双正則写像 $F(z) := (i-z)/(i+z)$ を考える．F は $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ でも定義されているから, その像 $F(\mathbb{R})$ を考えることができる．$F(\mathbb{R})$ がどのような集合か求めよ．

12.2 単位円板の自己同型

問題 12.2. $\alpha \in \mathbb{D}$ に対し $\psi_\alpha(z) := (\alpha - z)/(1-\overline{\alpha}z)$ とする．$\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ が $z \mapsto e^{i\theta}\psi_\alpha(z)$ という形の一次分数変換からなること (定理 12.2.2) を以下の手順で証明せよ．

(1) 任意の $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ に対しある $\alpha \in \mathbb{D}$ が存在して $g := f \circ \psi_\alpha$ が $g(0) = 0$ かつ $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ を満たすことを示せ.

(2) g および g^{-1} に Schwarz の補題 (命題 12.2.1) を適用して, 任意の $z \in \mathbb{D}$ に対し $|z| = |g(z)|$ となることを示せ.

(3) 再び Schwarz の補題を用いて $g(z) = e^{i\theta}z$ と書けることを示せ.

(4) 定理 12.2.2 を導け.

12.3 Riemann の写像定理

問題 12.3. 命題 12.3.4 を背理法で証明しよう．主張を思い出すと:

> $\Omega \subset \mathbb{C}$ を連結開部分集合とし, $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を Ω 上の単射な正則関数の列のであって, ある正則関数 f に Ω の任意のコンパクト部分集合上で収束するものとする．このとき f は単射であるか, または定数関数である．

f が単射でないと仮定して, $f(z_1) = f(z_2)$ なる $z_1 \neq z_2 \in \Omega$ を取る．新しい関数列 $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を

$$g_n(z) \ := \ f_n(z_1) - f_n(z_2)$$

で定義する．仮定より, 各 g_n は z_1 以外に零点を持たず, また関数列 $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は関数 $g(z) := f(z) - f(z_1)$ に任意のコンパクト部分集合上で一様収束する．$g \not\equiv 0$ と仮定してよい．

(1) Ω が連結であることから, z_2 が g の孤立した零点であることを示せ．つまり, ある $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, $D := D_\varepsilon(z_2) \subset \Omega$ かつ $D \setminus \{z_2\}$ で g は零点を持たないことを示せ.

[*1] 2019/07/09, ver. 0.1.

(2) g の z_2 での零点の位数を N とする. γ を (1) の D の境界 ∂D に正の向きを入れた積分路として, 次の等式を示せ.

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\,d\zeta.$$

(3) γ 上で g_n が g に一様収束することを確認し, それから次の等式を確認せよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_n'(\zeta)}{g_n(\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\,d\zeta.$$

(4) g_n が γ の内部 $D = D_\varepsilon(z_2)$ に零点を持たないことと (3) から矛盾を導け.

問題 12.4. Riemann の写像定理の証明の第三段で以下の主張を用いた.

$\mathbb{D}$ の自己同型 $\psi_\alpha(z) := \dfrac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}$ を考えると, $U := (\psi_\alpha \circ f)(\Omega)$ は単連結であり, 更に原点を含まない.

Ω が単連結であることを用いてこの主張を示せ.

問題 12.5 ([SS, Chap. 8 §4.1 Example 1])**.** α を $0 < \alpha < 2$ なる実数とする.

(1) 関数 $f(z) := z^\alpha$ による上半平面 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ の像を求めよ.

(2) 関数 $f(z) := \alpha\int_0^z \zeta^{\alpha-1}\,d\zeta$ による上半平面 $\mathbb{H}$ の像を求めよ. 但し積分路は線分 $\overline{0z}$ とする.

問題 12.6 ([SS, Chap. 8 §4.1 Example 2])**.** 関数 $f(z) := \int_0^z (1-\zeta^2)^{-1/2}\,d\zeta$ による上半平面 $\mathbb{H}$ の像を求めよ. 但し $(1-\zeta^2)^{1/2}$ の枝は $\mathbb{H}$ で正則かつ $-1 < \zeta < 1$ で正になるようにとるものとし, また積分路は線分 $\overline{0z}$ とする.

問題 12.7 ([SS, Chap. 8 §4.1 Example 3])**.** k を $0 < k < 1$ なる実数とする. 関数

$$f(z) := \int_0^z \frac{d\zeta}{[(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)]^{1/2}}$$

による上半平面 $\mathbb{H}$ の像を求めよ. 但し $[(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)]^{1/2}$ の枝は $\mathbb{H}$ で正則かつ $-1 < \zeta < 1$ で正になるようにとるものとし, また積分路は線分 $\overline{0z}$ とする.

レポート問題

レポート問題 12.1 (**Schwarz-Christoffel 写像**)**.** Riemann の写像定理により, 複素平面内の多角形の内部を上半平面に写す正則関数が存在する. これは Schwarz-Christoffel 写像と呼ばれる. この写像を解説せよ.

参考文献

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis Ⅱ, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅱ 複素解析**, 日本評論社 (2009).

以上です.