現代数学基礎 CⅢ　01 月 09 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

12　Riemann の写像定理

12.1　双正則写像

問題 12.1. $x \in \mathbb{R}$ について $|i-x| = |i+x|$ なので $|F(x)| = 1$. つまり $F(\mathbb{R})$ は単位円 ($\mathbb{D}$ の境界) に含まれる. $x = \tan t$ $(-\pi/2 \le t \le \pi/2)$ と置くと

$$F(x) \;=\; \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2} \;=\; \cos 2t + i \sin 2t \;=\; e^{i2t}$$

となるので, $F(\mathbb{R})$ は単位円 $|w| = 1$ から -1 を除いたものである.

12.2　単位円板の自己同型

問題 12.2. (1) $\alpha := f(0) \in \mathbb{D}$ とすれば良い.

(2) (1) より $g(0) = 0$, $g \in \mathrm{Aut}(D)$ なので Schwarz の補題が使えて, $z \in \mathbb{D}$ ならば $|g(z)| \le |z|$. また $g^{-1}(0) = 0$, $g^{-1} \in \mathrm{Aut}(D)$ なので, やはり Schwarz の補題より $w \in \mathbb{D}$ ならば $\left|g^{-1}(w)\right| \le |w|$. これら二つの不等式で $w = g(z)$ として $|g(z)| = |z|$ が得られる.

(3) 命題 12.2.1 (Schwarz の補題) (2) より明らか.

(4) $\psi_\alpha^{-1} = \psi_\alpha$ より $f(z) = g \circ \psi_\alpha^{-1}(z) = e^{i\theta}\psi_\alpha(z)$.

12.3　Riemann の写像定理

問題 12.3. (1) 一致の定理 (定理 6.3.1) から直ちにに従う.

(2) 偏角の原理 (定理 8.3.1) から直ちに従う.

(3) $\gamma \subset \Omega$ はコンパクト集合なので, 仮定より γ 上で $f_n \to f$ と一様収束する. このことから $g_n \to g$ と γ 上一様収束する. すると $1/g_n \to 1/g$ も一様収束であり, また Weierstrass の定理 6.5.3 (一様収束する正則関数列の微分の一様収束性) より $g_n' \to g'$ と一様収束する. 従って $g_n'/g_n \to g'/g$ と一様収束する. よって積分値も収束する.

(4) g_n が零点を持たないことから, 偏角の原理より $\int_\gamma [g_n'(z)/g_n(z)]\,dz = 0$. (3) より $n \to \infty$ で収束するが, それは 0 で, (2) と矛盾する.

問題 12.4. ψ_α が $\mathbb{D}$ の自己同型であることから. U 内の始点と終点を共有する二曲線 C_1, C_2 の ψ_α^{-1} による像は Ω 内の始点と終点を共有する二曲線となり, Ω が単連結であることからホモトープ. するとホモトピー写像と ψ_α の合成が C_1 と C_2 のホモトピー写像を与える. つまり U は単連結.

[*1] 2019/08/03, ver. 0.1.

$\psi_\alpha(z) = 0$ となる $z \in \mathbb{D}$ は $z = \alpha$ だけなので, 仮定 $\alpha \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$ より $\psi_\alpha(f(w)) = 0$ となる $w \in \Omega$ は存在しない.

問題 12.5. (1) 楔形の領域 $\{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg w < \alpha\pi\}$.

(2) (1) と同じ

問題 12.6. 上半平面の境界, つまり実軸を $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ と分けてその像を見ると, 求める集合は $\{w \in \mathbb{H} \mid |\mathrm{Im}\, w| < 1/2\}$.

問題 12.7. 前問 12.6 と同様, 実軸を $(-\infty, -1/k)$, $(-1/k, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1/k$, $(1/k, \infty)$ と分けてその像を見ると, 結論は $\pm K$ と $\pm K + iK'$ を頂点とする四辺形の内部. 但し K, K' は次で定まる正の実数.

$$K := f(1) = \int_0^1 \frac{d\zeta}{[(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)]^{1/2}}, \quad K' := \int_1^{1/k} \frac{d\zeta}{[(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)]^{1/2}}.$$

以上です.