現代数学基礎 CⅢ　01 月 09 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

12　Riemann の写像定理

今回は [SS, Chap. 8] に基づいて Riemann の写像定理を扱う.

12.1　双正則写像

§3 で扱った等角写像を復習しよう.

定義. 連続微分可能な複素関数 $f(z)$ が点 z_0 において**等角**または**共形** (conformal) であるとは, 以下の二条件を満たすことをいう.

- z_0 を含むある開集合上で単射.
- z_0 で交わる任意の滑らかな二曲線 C_1 と C_2 に対し, C_1 と C_2 の z_0 における角度 θ と $f(C_1)$ と $f(C_2)$ の $f(z_0)$ における角度 φ とが等しい.

定理. 点 z_0 を含む開集合上で定義されている複素関数 $f(z)$ について,

$$f \text{ は } z_0 \text{ において等角} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ は } z_0 \text{ において正則かつ } f'(z_0) \neq 0.$$

$\mathbb{C}$ の二つの部分集合が等角写像で写りあう状況を考えよう.

定義. $U, V \subset \mathbb{C}$ として, 全単射である正則関数 $f : U \to V$ を**双正則写像** (biholomorphism) とよぶ. またこのとき U と V は**共形同値** (conformally equivalent) もしくは**双正則** (biholomorphic) であるという.

次の主張が共形同値という言葉の由来である.

補題. 双正則写像は定義域の全ての点において等角写像である.

証明. 双正則写像 f は全単射なので逆写像 f^{-1} があるが, 逆関数定理より f^{-1} も複素微分可能, つまり正則写像である. すると $(f^{-1} \circ f)(z) = z$ と連鎖律から $f'(z) \neq 0$. よって上の定理の右側の条件が成り立つ. □

双正則な領域の例を一つ挙げよう.

命題 12.1.1. **上半平面** (upper half-plane) $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ と**単位円板** (unit disk) $\mathbb{D}$ を

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}, \quad \mathbb{D} := D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

で定義する. すると

$$F(z) := \frac{i - z}{i + z}, \quad G(w) := i\frac{1 - w}{1 + w}$$

で双正則写像 $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ が定まり, その逆は $G : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ で与えられる.

[*1] 2020/01/08, ver. 0.3.

証明. F と G は有理関数なので定義域上で正則. また $F'(z) \neq 0$ および $G'(w) \neq 0$ も直接計算で確認できる. $F(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D}$ は, 任意の $z \in \mathbb{H}$ が $-i$ より i に近いことから $|z-i| < |z+i|$ となることから従う. $G(\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}$ は, $w = u + iv$ と実部と虚部に分けると

$$\mathrm{Im}(G(w)) \;=\; \mathrm{Re}\left(\frac{1-u-iv}{1+u+iv}\right) \;=\; \mathrm{Re}\left(\frac{(1-u-iv)(1+u-iv)}{(1+u)^2+v^2}\right) \;=\; \frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2}$$

と計算できて, $\mathrm{Im}(G(w)) > 0$ となることから従う. 最後に, 直接計算で $F(G(w)) = w$ と $G(F(z)) = z$ が確認できる. 以上で主張が示せた. □

12.2 単位円板の自己同型

回転とは, $|c| = 1$ なる複素数 c を用いて $z \mapsto cz$ と表される写像のことであった [今吉, §2.2.1].

命題 12.2.1 (Schwartz の補題)**.** $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ は正則かつ $f(0) = 0$ とする. このとき

(1) 任意の $z \in \mathbb{D}$ に対し $|f(z)| \leq |z|$.

(2) ある $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ で $|f(z_0)| = |z_0|$ ならば, f は回転である.

(3) いつも $|f'(0)| \leq 1$ が成立する. もし $|f'(0)| = 1$ ならば, f は回転である.

証明. $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ と Taylor 展開すれば, これは $\mathbb{D}$ の任意の点で収束する. 仮定より $a_0 = 0$ なので, $f(z)/z = \sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1}$ も $\mathbb{D}$ 上の正則関数である.

(1) $|z| = r < 1$ なる $z \in \mathbb{D}$ について, 仮定 $|f(z)| < 1$ より $|f(z)/z| \leq 1/r$. ここで最大値の原理の系 (系 8.3.5) より, 任意の $z \in \overline{D_r(0)}$ についても $|f(z)/z| \leq 1/r$ となる. $r \to 1$ とすれば主張を得る.

(2) 仮定より正則関数 $f(z)/z$ が $\mathbb{D}$ で最大値を取るので, 最大値の原理 (定理 8.3.5) より $f(z)/z$ は定数関数である. $f(z) = cz$ とすると, z_0 での値から $|c| = 1$ となるので, f は回転である.

(3) 仮定 $f(0) = 0$ から $f'(0) = \lim_{z \to 0}(f(z) - f(0))/z = \lim_{z \to 0} f(z)/z$. これと (1) より $|f'(0)| \leq 1$. 等号が成立するときは, 最大値の原理から $f(z)/z$ は定数関数であり, (2) と同じ議論ができる.

□

開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ から自分自身への双正則写像を Ω の**自己同型** (automorphism) と呼ぶ. それらのなす集合を $\mathrm{Aut}(\Omega)$ と書く.

定理 12.2.2. 単位円板の任意の自己同型 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ は, ある $\theta \in \mathbb{R}$ と $\alpha \in \mathbb{D}$ を用いて次のように書ける.

$$f(z) \;=\; e^{i\theta}\frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z}.$$

証明は命題 12.2.1 を使えばさほど難しくはない. 詳細は演習問題とする.

12.3 Riemann の写像定理

領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ は空でなくまた全体 $\mathbb{C}$ とも一致しないときに**真**と呼ぶことにする.

定理 12.3.1. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を単連結な真の開部分集合とする. 任意の $z_0 \in \Omega$ に対し双正則写像 $F : \Omega \to \mathbb{D}$ であって $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) \in \mathbb{R}_{>0}$ となるものが唯一存在する.

簡単な系を一つ紹介すると

系 12.3.2. $\mathbb{C}$ の単連結な真の開部分集合は全て共形同値である.

証明は三段階に分けられる.

12.3.1 証明の第一段

$\emptyset \neq \Omega \subsetneq \mathbb{C}$ を単連結開集合とする. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ を取って固定する. Ω は単連結なので,

$$f(z) := \mathrm{Log}_{\Omega}(z-\alpha)$$

(対数関数の枝を取ったもの) によって Ω 上の正則関数 f が定まる. $e^{f(z)} = z - \alpha$ より $f(z)$ は単射である.

以下 $w \in \Omega$ を一つ取って固定する. この時, 任意の $z \in \Omega$ に対して $f(z) \neq f(w) + 2\pi i$ である. 実際, そうでなければ $e^{f(z)} = e^{f(w)}$ となり矛盾する. また $f(\Omega)$ は $f(w) + 2\pi i$ から真に離れている. つまり, ある $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, $f(\Omega) \cap D_\varepsilon(f(w)) = \emptyset$ である. 実際, そうでなければ点列 $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \Omega$ で $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(w) + 2\pi i$ となるものが取れるが, このとき $\lim_{n\to\infty} e^{f(z_n)} = e^{f(w)}$ だから, 指数関数の連続性より $\lim_{n\to\infty} z_n = w$ となり, 対数関数の連続性より $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(w)$ となって矛盾する.

ここで関数 F を

$$F(z) := \frac{1}{f(z) - (f(w) + 2\pi i)}$$

で定義する. 上の考察から F は Ω 上の関数として well-defined である. また F が単射だったので F も単射であり, 微分を計算することで Ω の各点で等角写像であることが分かる. つまり $F : \Omega \to F(\Omega)$ は双正則写像である. 更に上の考察より像 $F(\Omega)$ は有界集合である. 従って, F と適当な平行移動および定数倍を合成した双正則写像 G でもって $0 \in G(\Omega) \subset \mathbb{D}$ とできる.

以上より定理 12.3.1 の証明は Ω が $0 \in \Omega \subset \mathbb{D}$ を満たす場合に帰着できる. 実際, その場合に得られた双正則写像と上の G とを合成したものを F とすればよい. $F'(0) \in \mathbb{R}_{>0}$ にするには絶対値が 1 の適当な複素数を F にかければよい.

12.3.2 正規族と Montel の定理

証明の第二段に移る前にいくつか準備する.

定義. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $\mathcal{F}$ を Ω 上の関数からなる集合とする

(1) $\mathcal{F}$ が Ω の**コンパクト部分集合上で一様有界** (uniformly bounded on compact subsets) であるとは, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対して定数 $B > 0$ が存在して, 任意の $z \in K$ と $f \in \mathcal{F}$ に対して次が成立することをいう.

$$|f(z)| \leq B.$$

(2) $\mathcal{F}$ が**正規** (normal) であるとは, $\mathcal{F}$ の任意の列が, Ω の任意のコンパクト部分集合上で一様収束するような部分列を持つことである.

どちらの概念も, 複素関数に限らず, 一般の位相空間上の写像について定義できるものであるが, 次の定理は**正則関数**の族に関して成立するものである.

定理 12.3.3 (Montel の定理)**.** $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とする. $\mathcal{F}$ を Ω 上の正則関数からなる集合で, Ω のコンパクト部分集合上で一様有界であるとする. このとき, $\mathcal{F}$ は正規である.

この定理の証明はしない. [SS, Chapter 8 Theorem 3.3] を参照せよ.

もう一つ必要な主張がある.

命題 12.3.4. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を連結開部分集合とし, $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を Ω 上の単射な正則関数の列のであって, ある正則関数 f に Ω の任意のコンパクト部分集合上で収束するものとする. このとき f は単射であるか, または定数関数である.

この命題の証明は演習問題とする.

12.3.3　証明の第二段

第一段より Ω は $0 \in \Omega \subset \mathbb{D}$ となる単連結開集合と仮定してよい. Ω 上の関数族 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F} := \{f : \Omega \to \mathbb{D} \mid \text{単射かつ正則かつ } f(0) = 0\}$$

と定義する. 恒等写像が含まれるので $\mathcal{F} \neq \emptyset$ である. この第二段では, $f \in \mathcal{F}$ の中で $|f'(0)|$ が最大になるものの存在を示す.

$\mathcal{F}$ の定義より, 任意の $f \in \mathcal{F}$ の値域の絶対値が 1 未満なので, $\mathcal{F}$ は一様有界である. Ω 自身が有界だから, $\mathcal{F}$ は Ω のコンパクト部分集合上で一様有界である. 従って Montel の定理 12.3.3 より $\mathcal{F}$ は正規である.

ここで Cauchy の不等式 (命題 6.1.1) を思い出す: f を開円板 $D_R(0)$ の閉包上の正則関数とすると, $\|f\|_{\partial D} := \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$ として

$$|f'(0)| \leq \|f\|_{\partial D}/R.$$

これを各 $f \in \mathcal{F}$ に適用すれば, $\|f\|_{\partial D} \leq 1$ より $|f'(0)| \leq 1/R$ となる. R は Ω にのみ依存するので,

$$s := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)| < \infty$$

が分かる.

$\lim_{n\to\infty} |f_n'(0)| = s$ となる関数列 $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ を取る. $\mathcal{F}$ が正規なので, そのある部分列が存在して, 正則関数 f に Ω 内のコンパクト集合上で一様収束する. 特に $f'(0) = s$ である.

さて, 恒等写像が $\mathcal{F}$ に含まれているので $s \leq 1$ である. 従って収束先の正則関数 f は定数関数ではない. すると命題 12.3.4 より f は単射である.

収束先の正則関数 f は, 連続性から任意の $z \in \Omega$ に対して $|f(z)| \leq 1$ となるここで最大値の原理 (定理 8.3.4) より $|f(z)|$ は最大値を持たないから, $|f(z)| < 1$ が分かる. また $f_n(0) = 0$ より $f(0) = 0$ も従う. 以上より $f \in \mathcal{F}$ が分かった.

12.3.4　証明の第三段

第二段で存在を証明した f が結論の双正則写像 $\Omega \to \mathbb{D}$ であることを示す. f が正則な単射であることは第二段で分かっているので, 全射であることを示せば十分. 条件 $f'(0) \in \mathbb{R}_{>0}$ は, 第一段と同様に, 絶対値 1 の適当な複素数をかければ満たされる.

f が全射でないと仮定して, $\alpha \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$ を取る. $\mathbb{D}$ の自己同型

$$\psi_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$$

を考える (定理 12.2.2 参照). $\psi_\alpha(\alpha) = 0$ および $\psi_\alpha(0) = \alpha$ に注意する.

ここで次の事実を用いる. 証明は演習問題とする.

- $U := (\psi_\alpha \circ f)(\Omega)$ は単連結であり, 更に原点を含まない.

よって U 上の正則関数 g が $g(w) := e^{\frac{1}{2}\log w}$ で定まる. そして正則関数 F を次のように定める.

$$F \;:=\; \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f.$$

$F \in \mathcal{F}$ となることを確かめよう. $F(0) = 0$ と $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ は, 合成に現れる各関数が同じ性質を満たすので確かに成立する. F が単射であることも同様に示せる. 以上より $F \in \mathcal{F}$ である.

こうして得られた F が f の取り方と矛盾することを言えば証明が終わる. つまり $|F'(0)| > |f'(0)|$ を示せばよい. 二乗関数を $h(w) := w^2$ と書き, $\Phi := \psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1}$ とすると

$$f \;=\; \psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1} \circ F \;=\; \Phi \circ F$$

が分かる. 特に $f'(0) = \Phi'(0)F'(0)$. 従って $|F'(0)| < 1$ が言えれば証明が終わる.

ここで $\Phi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ と $\Phi(0) = 0$ に注意する. また F は単射だが h は単射でないので, Φ も単射でない. すると Schwarz の補題の最後の主張 (命題 12.2.1 (3)) が使えて, 目的の $|F'(0)| < 1$ が得られた.

参考文献

[今吉] 今吉洋一, **複素関数概説**，サイエンス社 (1997).

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis II, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 II 複素解析**, 日本評論社 (2009).

以上です.