現代数学基礎 CⅢ　12 月 19 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

問題. 半円を積分路とする複素積分を利用することで, 次の実積分を計算せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

解答. 原点中心で十分大きい半径 R の半円 C_R と実軸上の線分 $[-R,R]$ からなる積分路 C 上で, $f(z) := 1/(z^4+1)$ を積分する. C の内部の $f(z)$ の極は $\alpha := e^{i\pi/4}$ と $\beta := e^{i3\pi/4}$ で, 留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) = \frac{1}{f'(\alpha)} = \frac{1}{4\alpha^3} = \frac{e^{-i3\pi/4}}{4}, \quad \operatorname*{Res}_{z=\beta} f(z) = \frac{1}{4\beta^3} = \frac{e^{-i\pi/4}}{4}$$

なので

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\Big(\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\beta} f(z)\Big) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

また

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \pi R \cdot \sup_{z\in C_R} |f(z)| \le \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

従って $\int_C = \int_{C_R} + \int_{-R}^{R}$ で $R \to \infty$ を考えることにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

コメント. 留数の計算を 1 点, C_R の評価を 1 点, その他の部分を 1 点で, 合計 3 点満点で採点しました. 平均点は 1.9 点でした.

以上です.

[*1] 2019/12/19, ver. 0.1.