現代数学基礎 CⅢ　追加レポート解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

問題 1 (10 点)**.** 複素関数 $f(z) = \overline{z}^2$ が正則か否か論じよ.

解答. Cauchy-Riemann 方程式, または微分の定義を調べると, $z = 0$ では正則, $z \neq 0$ では正則ではない.

問題 2 (10 点)**.** n を正の整数として, 次の複素積分の値を求めよ. 但し積分路 C は単位円 $|z| = 1$ の上半分に正の向きを入れたものとする.

$$\int_C (z^2 + z^{-1})^n \, dz.$$

解答. 被積分函数 $f(z) := (z^2 + z^{-1})^n$ は $z = 0$ で極をもつ有理 (型) 函数なので, 留数定理から $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z)$. 二項定理から $f(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{2k} z^{-(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{3k-n}$ で, 留数は z^{-1} の係数だから,

$$\int_C f(z)\,dz = \begin{cases} 2\pi i \binom{3k+1}{k} & (n = 3k+1 \text{ と書ける場合}), \\ 0 & (\text{その他の場合}). \end{cases}$$

問題 3 (10 点)**.** r を $r \neq 1$ かつ $r \neq \sqrt{3}$ なる正の実数とし, C を原点中心で半径 r の円に正の向きを入れたものとする. 次の複素積分の値を求めよ.

$$\int_C \frac{z^2}{(z-1)(z^2+2z+3)} \, dz.$$

解答. 被積分函数 $f(z) := \frac{z^2}{(z-1)(z^2+2z+3)}$ は $z = 1, \alpha := -1 + \sqrt{2}i, \beta := -1 - \sqrt{2}i$ に 1 位の極を持つ有理函数. 留数定理から $I := \int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{w:C \text{ の内側の極}} \operatorname{Res}_{z=w} f(z)$. $|\alpha| = |\beta| = \sqrt{3}$ に注意して

(i) $r < 1$ の場合, C の内側に極はないので $I = 0$.

(ii) $1 < r < \sqrt{3}$ の場合, C の内側に極は $z = 1$ だけなので $I = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi i \left. \frac{z^2}{z^2+2z+3} \right|_{z=1} = \frac{\pi i}{3}$.

(iii) $\sqrt{3} < r$ の場合, $I = 2\pi i \big(\operatorname{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\alpha} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\beta} f(z) \big) = 2\pi i \big(\frac{1}{6} + \frac{5+\sqrt{2}i}{12} + \frac{5-\sqrt{2}i}{12} \big) = 2\pi i$.

問題 4 (10 点)**.** $a \in \mathbb{C}$ とする. 関数 $f(z) := \dfrac{\tan z}{z-a}$ の全ての極を求め, その位数と留数を答えよ.

解答. $f(z) = \frac{\sin z}{(z-a)\cos z}$ 及び $\sin z$, $\cos z$, $z - 1$ が全て整函数であることに注意して,

(i) $a \notin \mathbb{Z}\pi/2$ の場合, $z = a$ と $z = (n + 1/2)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ が極で, 全て 1 位. 留数は $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \tan a$, $\operatorname{Res}_{z=(n+1/2)\pi} f(z) = -((n+1/2)\pi - a)^{-1}$.

(ii) $a \in (\mathbb{Z}\pi/2) \setminus \mathbb{Z}\pi$ の場合, 極は $z = (n+1/2)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. a を除いて全て 1 位で, 留数は (i) と同じ. $z = a$ は 2 位の極で, 留数は 0.

(iii) $a \in \mathbb{Z}\pi$ の場合, $z = a$ は除去可能特異点なので, 極は $z = (n+1/2)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, 但し $z \neq a$ で, 全て 1 位. 留数は (i) と同じ.

以上です.

[*1] 2020/01/09, ver. 0.1.