現代数学基礎 CⅢ　12 月 19 日分演習問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

11　ゼータ関数

11.2　テータ関数と関数等式

ここではテータ関数 $\vartheta(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$ が満たす, 次の関数等式を証明する.

$$\vartheta(t) \;=\; t^{-1/2}\vartheta(1/t)$$

定義. 実数の集合 $\mathbb{R}$ を含む開集合上で定義されている複素数値関数 f に対し, その **Fourier 変換** $\widehat{f}$ を (意味があれば) 次の積分によって定義する.

$$\widehat{f}(\xi) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx.$$

定義. $a \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し, 次の二条件を満たす関数 f の集合を $\mathfrak{F}_a$ と書く.

- f は水平帯 $S_a := \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(a)| < a\}$ 上の正則関数である.
- 定数 $A \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, 任意の $z = x + iy \in S_a$ に対し $f(z) \le A/(1+x^2)$.

また $\mathfrak{F} := \cup_{a\in\mathbb{R}_{>0}}\mathfrak{F}_a$ と定める.

問題 11.1 ([SS, Chap. 4 Theorem 2.1])**.** $a \in \mathbb{R}_{>0}$ かつ $f \in \mathfrak{F}_a$ ならば, $0 \le b < a$ なる任意の実数 b に対しある定数 $B \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(\xi)| \;\le\; Be^{-2\pi b|\xi|}$$

が成立する. このことを以下の手順で示せ.

(1) $b = 0$ の場合を (実積分のみを用いて) 示せ.

(2) $0 < b < a$ かつ $\xi > 0$ の場合を, 図 11.1 のような積分路 C での複素積分 $\int_C f(z)e^{-2\pi i z\xi}\,dz$ を考えることで示せ.

(3) $0 < b < a$ かつ $\xi < 0$ の場合を示せ.

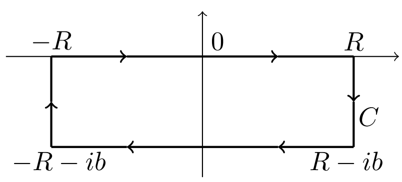

図 11.1　問題 11.1 (2) の積分路 C

問題 11.2 (**Poisson 和公式** [SS, Chap. 4 Theorem 2.3])**.** 任意の $f \in \mathfrak{F}$ に対して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$$

[*1] 2019/07/08, ver. 0.1.

が成立することを, 次の手順で示せ.

(1) $f \in \mathfrak{F}_a$ と仮定し, $0 < b < a$ なる実数 b を固定する. N を正の整数として, 図 11.2 のような積分路 C_N 上で $f(z)/(e^{2\pi iz}-1)$ を積分することにより, 次の等式を示せ.

$$\sum_{n=-N}^{N} f(n) = \int_{C_N} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1} dz.$$

(2) $L_1 := (-\infty - ib, \infty - ib)$, $L_2 := (-\infty + ib, \infty + ib)$ とする. 次の等式を示せ.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \int_{L_1} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1} dz - \int_{L_2} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1} dz.$$

(3) L_1 上で $1/(e^{2\pi iz}-1) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi inz}$, L_2 上で $1/(e^{2\pi iz}-1) = -\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz}$ となることに注意して, 結論の等式を示せ.

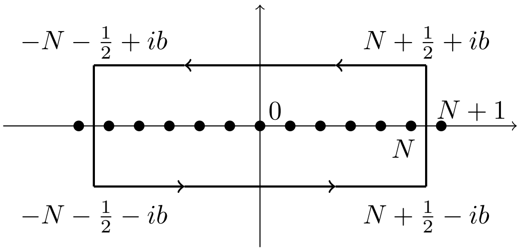

図 11.2　問題 11.2 (1) の積分路 C

問題 11.3. $f(x) = e^{-\pi x^2}$ とする.

(1) $f \in \mathfrak{F}$ を示せ.

(2) $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$ となること, つまり f は Fourier 変換で不変であることを示せ.

(3) Poisson 和公式 (問題 11.2) から等式 $\vartheta(t) = t^{-1/2}\vartheta(1/t)$ を示せ.

レポート問題

レポート問題 11.1 (**Fourier 逆変換** [SS, Chap. 4 Theorem 2.2])**.** $f \in \mathfrak{F}$ と $x \in \mathbb{R}$ に対し次の等式が成立することを示せ.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi ix\xi}\, d\xi.$$

参考文献

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis Ⅱ, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅱ 複素解析**, 日本評論社 (2009).

以上です.