現代数学基礎 CⅢ　12 月 19 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

11　ゼータ関数

11.2　テータ関数と関数等式

問題 11.1.　(1) $\widehat{f}$ が有界であることを示せばよいが,

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \le A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2A\Big(\int_0^1 + \int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\Big) \le 2A(1+1) = 4A$$

となって示せた.

(2) 積分路 C の左側の辺について,

$$\left|\int_{-R-ib}^{-R} f(z)e^{-2\pi iz\xi}\, dz\right| \le \int_0^b \left|f(-R-it)e^{-2\pi i(-R-it)\xi}\right| dt \le \int_0^b \frac{A}{R^2}e^{-2\pi t\xi}\, dt \le \frac{Ab}{R^2}$$

より $R\to\infty$ で 0 に収束する. 右側の辺についても同様. 一方 C 上とその内部に f の極はないから, Cauchy の積分定理より $\int_C f(z)\, dz = 0$. よって $R\to\infty$ として $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-ib)e^{-2\pi i(x-ib)\xi}\, dx$. これから

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{(1+x^2)^2}e^{-2\pi b\xi}\, dx \le 4Ae^{-2\pi b\xi}.$$

(3) (2) の積分路の代わりに $-R, R, R+ib, -R+ib$ を頂点とする四角形の周を積分路として, (2) と同様の議論をすればよい.

問題 11.2.　(1) C の内部の $f(z)/(e^{2\pi iz}-1)$ の極は $z=n$ ($n\in\mathbb{Z}$, $|n|\le N$) で留数は全て $1/(2\pi i)$. 留数定理から結論が従う.

(2) (1) で $R\to\infty$ として, 積分路の右側の辺および左側の辺での積分が 0 になることを示せばよい.

(3) (2) と注意により $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f}(n) + \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)$.

問題 11.3.　(1) $e^{\pi x^2} \ge 1+x^2$ より $f\in\mathfrak{F}_1\subset\mathfrak{F}$.

(2) Gauss 積分より $\widehat{f}(0)=1$. また

$$(\widehat{f})'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot(-2\pi ix)e^{-2\pi i\xi}\, dx = i\widehat{f'}(\xi) = i\cdot(2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi)$$

より $(\widehat{f})'(\xi) = -2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)$. よって $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$.

(3) 略.

以上です.

[*1] 2019/07/08, ver. 0.1.