現代数学基礎 CⅢ　12 月 19 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

11　ゼータ関数

今回の内容は [SS, Chapter 6 §2, Chapter 7 §1] に基づいてゼータ関数を扱う.

11.1　関数等式と解析接続

定義. $s \in \mathbb{R}_{>1}$ に対し Riemann の**ゼータ関数** $\zeta(s)$ を次の級数で定義する.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

命題 11.1. 級数 $\zeta(s)$ は領域 $\mathrm{Re}(s) > 1$ で収束し, この領域で正則関数を定める.

証明. $s = \sigma + i\tau$ と実部と虚部に分ければ $|n^{-s}| = n^{-\sigma}$. 仮定より $\sigma > 1+\delta$ なる $\delta > 0$ が取れて $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\delta}$ は収束するから, 級数 $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1+\delta$ で一様収束する. 従って $\mathrm{Re}(s) > 1$ で正則関数を定める. □

この副節の目的は $\zeta(s)$ の解析接続である.

定理 11.2. $\zeta(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続され, その極は $s = 1$ のみにあり, 単純極である.

$\zeta(s)$ の解析接続の方法は数通りあるが, ここでは次の関数等式を用いる方法を紹介する.

定理 11.3 (Riemann ゼータ関数の関数等式)**.**

$$\xi(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で正則であり, $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続される. 解析接続されたものは $s = 0$ と $s = 1$ に 1 位の極を持ち, さらに任意の $s \in \mathbb{C}$ に対し次の関数等式を満たす.

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

$\zeta(s)$ で言い換えると

$$\zeta(s) = \pi^{s-1/2}\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}\zeta(1-s).$$

関数等式の証明は次の副節に回して, 先に定理 11.2 を証明する.

定理 11.2 の証明. $\xi(s)$ を用いて

$$\zeta(s) = \pi^{s/2}\frac{\xi(s)}{\Gamma(s/2)}$$

となるので, これが $\zeta(s)$ の解析接続を与える. §9 の結果より, $1/\Gamma(s/2)$ は整関数で $s = 0, -2, -4, \ldots$ のみに単純零点を持つ. よって $\xi(s)$ の 1 位の極 $s = 0$ は $1/\Gamma(s/2)$ の零点と打ち消しあい, $s = 1$ のみが残る. つまり $\zeta(s)$ は $s = 1$ のみに極を持つ. □

[*1] 2019/12/19, ver. 0.2.

11.2 テータ関数と関数等式の証明

ゼータ関数の関数等式 (定理 11.3) の証明の準備として

定義. 実変数 t に対する**テータ関数** $\vartheta(t)$ を次で定義する.

$$\vartheta(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}.$$

一様収束するので $\vartheta(t)$ が意味を持つことに注意する.
テータ関数は次の関数等式を満たす.

命題 11.4. $t \neq 0$ の時

$$\vartheta(t) = t^{-1/2}\vartheta(1/t).$$

この命題は Fourier 変換を使って証明できる. 演習問題を参照せよ.
命題 11.4 から次の補題の (1) が従う.

補題 11.5. (1) ある $C \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, $t \to 0$ のとき $\vartheta(t) \leq Ct^{-1/2}$.
(2) ある $C' \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して, $t \geq 1$ なら $\vartheta(t) \leq C'e^{-\pi t}$.

証明. (2) は $t \geq 1$ で $\sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t} \leq \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n t} \leq C'e^{-\pi t}$ と評価できることから従う. □

命題 11.4 と次の主張がゼータ関数の関数等式の証明の鍵になる.

定理 11.6. $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ について, $\mathrm{Re}(s) > 1$ なら

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} u^{s/2-1}\left(\vartheta(u) - 1\right) du.$$

この定理を一度認めて, 先に関数等式の証明を行おう.

定理 11.3 の証明. $\psi(u) := (\vartheta(u) - 1)/2$ とする. 命題 11.4 より

$$\psi(u) = u^{-1/2}\psi(1/u) + \frac{1}{2u^{1/2}} - \frac{1}{2}.$$

$\mathrm{Re}(s) > 1$ と仮定して, 定理 11.6 とこの関数等式を用いると

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= \int_0^{\infty} u^{s/2-1}\psi(u)\,du \\
&= \int_0^{1} u^{s/2-1}\psi(u)\,du + \int_1^{\infty} u^{s/2-1}\psi(u)\,du \\
&= \int_0^{1} u^{s/2-1}\left(u^{-1/2}\psi(1/u) + \frac{1}{2u^{1/2}} - \frac{1}{2}\right) du + \int_1^{\infty} u^{s/2-1}\psi(u)\,du \\
&= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{\infty}\left(u^{-s/2-1/2} + u^{s/2-1}\right)\psi(u)\,du.
\end{aligned}$$

補題 11.5 より $\psi(u)$ は $u \to \infty$ で指数関数的に減衰するので, 右辺の積分は整関数を定める. これで $\xi(s)$ が $s = 0$ と $s = 1$ にのみ 1 位の極を持つ有理型関数に解析接続されることが分かった. またこの表示で $s \longmapsto 1 - s$ としても変わらないので $\xi(1-s) = \xi(s)$ である. □

さて定理 11.6 の証明をしよう. 補題を一つ用意する.

補題 11.7. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ なら

$$\int_0^\infty e^{-\pi n^2 u} u^{s/2-1}\, du \;=\; \pi^{-s/2}\Gamma(s/2) n^{-s}.$$

証明. $u = t/(\pi n^2)$ と変数変換すると左辺の積分は

$$(\pi n^2)^{-s/2} \int_0^\infty e^{-t} t^{s/2-1}\, dt$$

となって, ガンマ関数の定義より結論を得る. □

定理 11.6 の証明. 右辺から計算する. $\vartheta(u)$ の定義より

$$\frac{\vartheta(u)-1}{2} \;=\; \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 u}.$$

補題 11.5 より積分の順序交換ができて, 更に補題 11.7 を使うと

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty u^{s/2-1}\left(\vartheta(u)-1\right)\, du \;=\; \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty u^{s/2-1} e^{-\pi n^2 u} \;=\; \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\sum_{n=1}^\infty n^{-s}$$

となって左辺と一致する. □

11.3　無限積表示

ゼータ関数 $\zeta(s)$ は次の無限積表示を持つ. $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ の場合は Euler が考察したものなので, 一般の $s \in \mathbb{C}$ の場合でも **Euler の無限積公式**と呼ばれる.

定理 11.8. $\mathrm{Re}(s) > 1$ において

$$\zeta(s) \;=\; \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

但し積の p は全ての素数を走る.

証明は素因数分解の一意性を使ってできる. 詳細は演習問題とする.

Euler の無限積公式から, 特に $\mathrm{Re}(s) > 1$ で $\zeta(s)$ は零点を持たないことが分かる. $\zeta(s)$ の零点集合については, 関数等式から次の主張が導出できる.

定理 11.9. $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$ の補集合にある $\zeta(s)$ の零点は $s = -2, -4, -6, \ldots$ である.

証明. ゼータ関数の関数等式

$$\zeta(s) \;=\; \pi^{s-1/2}\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)}\zeta(1-s)$$

の右辺を考えると, $\mathrm{Re}(s) < 0$ の場合

- $\zeta(1-s)$ は $\mathrm{Re}(1-s) > 1$ より零点を持たない.
- $\Gamma((1-s)/2)$ も $\mathrm{Re}(1-s) > 1$ より零点を持たない.
- $1/\Gamma(s/2)$ は $s = -2, -4, -6, \ldots$ に単純零点を持つ.

$\mathrm{Re}(s) > 0$ の場合と合わせて結論を得る. □

もう少し考察を進めると, 次の主張が証明できる.

事実 11.10 ([SS, Chapter 7, Theorem 1.2])**.** $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上に $\zeta(s)$ の零点は存在しない.

ゼータ関数は素数の深い性質を反映する関数である. それは Euler の無限積公式 (定理 **??**) だけからでも推測できる. 幾つかの有名な事項を述べておくと

- **素数定理**, つまり素数分布を表す関数 $\pi(x) := \#\{x$ 以下の素数 $\}$ の漸近挙動が

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty)$$

  となることと**事実 11.10** は同値である. [SS, Chapter 7 §2] を参照せよ.
- **Riemann 予想**: ゼータ関数 $\zeta(s)$ の $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ におけるの零点は $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ **上にのみ存在**する.

参考文献

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis Ⅱ, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅱ 複素解析**, 日本評論社 (2009).

以上です.