現代数学基礎 CⅢ　中間試験解答

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

問題 1. 文字 a と非負整数 n に対し

$$(a)_n := \begin{cases} 1 & (n=0) \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) & (n>0) \end{cases}$$

と書くことにする. α, β, γ を複素数とし, γ は整数ではないと仮定する. 級数

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(1)_n} z^n$$

が単位円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ で収束することを示せ.

解答. $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ とする. $\alpha, \beta \notin \mathbb{Z}_{\le 0}$ なら

$$\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = \left|\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

すると ratio test より $|z| < 1$ で収束することが分かる. $\alpha = -N \in \mathbb{Z}_{\le 0}$ なら, $f_{N+1} = f_{N+2} = \cdots = 0$ より $F(z) = \sum_{n=0}^{N} f_n z^n$ は多項式なので, 特に単位円板で収束する. $\beta \in \mathbb{Z}_{\le 0}$ の場合も同様.

コメント. ratio test が使えていれば +25 点, 多項式になる場合を考慮していれば +5 点としました.

問題 2. 関数 $f(z) := \dfrac{1}{\sin^2 z}$ の全ての極を求め, それらの位数と留数を答えよ.

解答. $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ で二位の極を持ち, 留数は 0. 実際,

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=n\pi} \frac{1}{\sin^2 z} &= \lim_{z\to n\pi} \frac{d}{dz} \frac{(z-n\pi)^2}{\sin^2 z} \overset{(*1)}{=} \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0} \frac{2z(\sin z - z\cos z)}{\sin^3 z} = \lim_{z\to 0} \frac{2z}{\sin z} \frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z} \\ &= 2\lim_{z\to 0} \frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z} \overset{(*2)}{=} 2\lim_{z\to 0} \frac{z}{2\cos z} = 0. \end{aligned}$$

但し $(*1)$ では $\sin z$ の周期性, $(*2)$ ではロピタルの定理を用いた.

コメント. 極の位置と位数をそれぞれ 5 点, 留数の計算を 20 点としました.

問題 3. 次の複素積分を求めよ. 但し n は正の整数とし, 積分路 C は原点中心で半径 2 の円 $|z| = 2$ に正の向き付けを入れたものとする.

$$\int_C (z+1/z)^n \, dz.$$

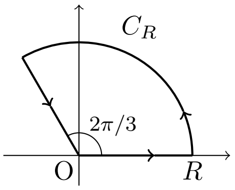
解答. C の内部の極は $z = 0$ のみ. すると, $(z+1/z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-2k}$ の $1/z$ の係数から

$$\int_C (z+1/z)^n \, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} (z+1/z)^n = \begin{cases} \binom{2k-1}{k} & (n = 2k-1 \text{ は奇数}) \\ 0 & (n \text{ は偶数}) \end{cases}.$$

コメント. 留数定理を使うところまでを 10 点, その後の場合分けについて偶数の場合を 5 点, 奇数の場合を 15 点としました.

問題 4. 下図のような半径 R, 中心角 $2\pi/3$ の扇形の積分路 C_R による複素積分 $\int_{C_R}(1+z^3)^{-1}dz$ を利用して, 次の実積分を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx.$$



解答. $f(z) := (1+z^3)^{-1}$ とする. 留数定理から

$$\begin{aligned}\int_{C_R} f(z)dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/3}} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/3}} \frac{2\pi i}{z^3+1} = 2\pi i \lim_{z\to e^{\pi i/3}} \frac{z-e^{\pi i/3}}{z^3+1}\\ &\overset{(*)}{=} \left.\frac{2\pi i}{(z^3+1)'}\right|_{z=e^{\pi i/3}} = \frac{2\pi i}{3e^{2\pi i/3}} = \frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i).\end{aligned}$$

但し $(*)$ でロピタルの定理を用いた. 積分路 C_R のうち円弧の部分を A, 原点に向かう線分の部分を B と書くと

$$\int_{C_R} f(z)dz = \int_0^R f(x)dx + \int_A f(z)dz + \int_B f(z)dz.$$

B で $z = xe^{2\pi i/3}$ と変数変換すれば $\int_B f(z)dz = -e^{2\pi i/3}\int_0^R f(x)dx$. よって

$$\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i) = (1-e^{2\pi i/3})\int_0^R f(x)dx + \int_A f(z)dz. \tag{$*$}$$

$R \gg 1$ なら

$$\left|\int_A f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi/3} \frac{R}{R^3-1}d\theta \le \frac{2\pi}{3}\frac{2}{R^2}$$

と評価できるので, 上の等式 $(*)$ で $R \to 0$ として

$$\int_0^\infty f(x)dx = \frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}-i}{1-e^{2\pi i/3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

コメント. 留数の計算で 10 点, C_R の評価で 10 点, 残りを 10 点としました.

全体のコメント

各問 30 点満点, 計 120 点で採点しました. 平均点は $12.5+16.7+17.5+13.0=59.6$ 点でした.

答案の点数 x の横にある丸で囲ってある数字 t は, 初回にお伝えした通り, 今回までの小テスト・演習発表・レポートの点数 y と期末試験の点数を z として

$$t := y + \max(x,z)\times 0.8 + z\times 0.2$$

で計算した総点数です. $t \ge 60$ なら単位を出す予定です. 現時点での t の分布は次の通りです.

t	1–39	40–59	60–79	80–99	100–
人数	15	17	16	9	4

現時点で $t \le 40$ の人には追加レポートを配布します.