現代数学基礎 CⅢ　12 月 12 日分演習問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html`

10　ガンマ関数

10.1　積分表示と解析接続

問題 10.1. 講義ノートの命題 10.1.1 で用いた次の主張を示せ: M を正の実数とする. ある正の実数 C が存在して, 任意の $t > 1$ に対し $e^{t/2}/t^{M-1} \geq C$ となる.

問題 10.2. 講義ノートの補題 10.1.2 を証明せよ: $s \in \mathbb{H}_{\mathrm{r}} := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ に対して $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

10.2　無限積表示

問題 10.3. Euler の定数 $\gamma := \lim_{N\to\infty}\bigl(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N} - \log N\bigr)$ が収束することを示せ.

問題 10.4. この問題では講義ノートの事実 9.3.2 の後半の評価式を導出する:

$$\left|\frac{1}{\Gamma(s)}\right| \leq c_1 e^{c_2(|s|+1)\log(|s|+1)}.$$

(1) $\Gamma(s)$ の積分による定義を

$$\Gamma(s) = \int_0^1 e^{-t}t^{s-1}\,dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{s-1}\,dt$$

と分けて書く. これから次の等式を導け.

$$\Gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+s)} + \int_1^\infty e^{-t}t^{s-1}\,dt.$$

(2) $\sigma := \mathrm{Re}(s)$ として, 次の不等式が成立することを示せ.

$$\left|\int_1^\infty e^{-t}t^{-s}\,dt\right| \leq \int_1^\infty e^{-t}t^{|\sigma|}\,dt \leq e^{(|\sigma|+1)\log(|\sigma|+1)}.$$

(3) ガンマ関数の関数等式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi^{-1}\sin\pi s$ と (1) から

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1-s)}\right)\frac{\sin\pi s}{\pi} + \left(\int_1^\infty e^{-t}t^{-s}\,dt\right)\frac{\sin\pi s}{\pi}$$

となる. この右辺の第二項の絶対値が $c_1 e^{c_2(|s|+1)\log(|s|+1)}$ という形の式で上から抑えられることを示せ.

(4) 次に (3) の右辺の第一項を評価したい. まず $|\mathrm{Im}(s)| > 1$ の場合, 次のように評価できることを示せ.

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1-s)}\frac{\sin\pi s}{\pi}\right| \leq c e^{\pi|s|}.$$

[*1] 2019/07/08, ver. 0.1.

(5) $|\mathrm{Im}(s)| \le 1$ の場合, $k - 1/2 \le \mathrm{Re}(s) < k + 1/2$ となる $k \in \mathbb{Z}$ を選ぶ. $k \ge 1$ の時は, 更に

$$(-1)^{k-1}\frac{\sin \pi s}{\pi k!\,(k+1-s)} + \sum_{n \ne k-1}(-1)^n \frac{\sin \pi s}{\pi n!\,(n+1-s)}$$

と (3) の右辺第一項を分けて, この二項がともに有界であることを示せ.

(6) 残る $|\mathrm{Im}(s)| \le 1$ かつ $k < 1$ の場合, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1-s)}$ が有界であることを示せ.

10.3　その他の問題

問題 10.5. 次の実積分を複素積分を用いて計算せよ. 但し $a, b \in \mathbb{R}$ かつ $0 < b < a$ とする.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$.　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + a^2}dx$.　(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

問題 10.6 ([SS, Chapter 3 Example 3])**.** 双曲余弦関数 $\cosh z := (e^z + e^{-z})/2$ に関する次の実積分を, $z = -R,\ R,\ R + 2i,\ -R + 2i$ を頂点にもつ長方形の辺上での $f(z) := e^{-2\pi i z\xi}/\cosh(\pi z)$ の複素積分を用いて計算せよ. 但し $\xi \in \mathbb{R}$ とする.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{\cosh(\pi x)}dx.$$

レポート問題

レポート問題 10.1. 文字 a と非負整数 n に対し

$$(a)_n := \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) & (n \ge 1) \end{cases}$$

と書く. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma \ne 0, -1, -2, \ldots$ に対し **Gauss の超幾何級数** $F(z) = F(z; \alpha, \beta; \gamma)$ を次で定める.

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(1)_n}z^n$$

(1) $F(z)$ の収束半径を求めよ.

(2) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ 及び z が (1) で求めた収束領域にある場合に次の等式を示せ.

$$F(z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\,dt.$$

(3) $F(z)$ が $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ 上に解析接続されることを示せ.

参考文献

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis Ⅱ, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅱ 複素解析**, 日本評論社 (2009).

連絡事項

12/12 の二コマ目に中間試験を行います. そのため発表の時間は設けません.

以上です.