現代数学基礎 CⅢ　12 月 12 日分演習解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

10　ガンマ関数

10.1　積分表示と解析接続

問題 10.1. n を $n-1 < M \le n$ となる整数とする．$n \ge 1$ に注意する．$t > 1$ なら $e^{t/2} = \sum_{k \ge 0}(t/2)^k/k! \ge (t/2)^n/n!$ かつ $t^{M-1} \le t^n$ なので, $e^{t/2}/t^{M-1} \ge (t/2)^n/(n!t^n) = 1/(2^n n!)$. よって $C := 1/(2^n n!)$ とすれば良い.

問題 10.2. 命題 9.1.1 の証明で用いた $F_\varepsilon(s) := \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t}t^{s-1}dt$ を使うと, 部分積分で

$$F_\varepsilon(s+1) \,=\, -\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{d}{dt}(e^{-t}t^s) + sF_\varepsilon(s).$$

$e^{-t}t^s$ は $t \to 0$ 及び $t \to \infty$ で 0 に収束するので, 漸化式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を得る.

10.2　無限積表示

問題 10.3. $\log N$ の積分表示を用いて

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N \,=\, \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \int_1^N \frac{1}{x}\,dx \,=\, \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{N}$$

となる．$x \in [n, n+1]$ として, 平均値の定理を $f(x) := 1/x$ と区間 $[n, x]$ に使うと, ある $y \in [n, x]$ があって

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{x}\right| \,=\, \frac{|x-n|}{y^2} \,\le\, \frac{1}{n^2}$$

となる．よって

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N \,\le\, \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N}.$$

この右辺は収束するので, 極限値 γ も存在する.

問題 10.4.　(1) 冪級数展開して項別積分すればよい.

(2) 後半だけ示す．σ が正と仮定して構わない．$n-1 < \sigma \le n$ なる $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を取ると

$$\int_1^\infty e^{-t}t^\sigma\,dt \,\le\, \int_1^\infty e^{-t}t^n\,dt \,=\, n! \,\le\, n^n \,=\, e^{n\log n} \,\le\, e^{(\sigma+1)\log(\sigma+1)}$$

[*1] 2019/07/08, ver. 0.1.

(3) まず積分の部分について, $|t^{-s}| = \left|e^{-s\log t}\right| = \left|e^{-(\mathrm{Re}(s)+i\,\mathrm{Im}(s))\log t}\right| = \left|e^{-\mathrm{Re}(s)\log t}\right| = \left|t^{-\mathrm{Re}(s)}\right|$ より

$$\left|\int_1^\infty e^{-t}t^{-s}\,dt\right| \le \int_1^\infty e^{-t}t^{|\sigma|}\,dt \;\le\; e^{(|\sigma|+1)\log(|\sigma|+1)} \;\le\; e^{(|s|+1)\log(|s|+1)}.$$

但し第二の不等号では (1) を用いた. 次に $\sin z = (e^{iz}-e^{-iz})/(2i)$ より $|\sin\pi s| \le e^{\pi|s|}$. よって

$$\left|\left(\int_1^\infty e^{-t}t^{-s}\,dt\right)\frac{\sin\pi s}{\pi}\right| \le \frac{1}{\pi}e^{(|s|+1)\log(|s|+1)}e^{\pi|s|}.$$

$\zeta := |s|$ として, $\zeta > 0$ で $\zeta \le (\zeta+1)\log(\zeta+1)$ となることに注意すると $(\zeta+1)\log(\zeta+1)+\pi\zeta \le (\pi+1)(\zeta+1)\log(\zeta+1)$. 以上より

$$\left|\left(\int_1^\infty e^{-t}t^{-s}\,dt\right)\frac{\sin\pi s}{\pi}\right| \le \frac{1}{\pi}e^{(\pi+1)(|s|+1)\log(|s|+1)} \;\le\; e^{(\pi+1)|s|\log(|s|+1)}.$$

(4) $|\mathrm{Im}(s)| > 1$ より各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $|n+1-s| > 1$. また (3) の議論で示したように $|\sin(\pi s)| \le e^{\pi|s|}$. よって

$$\left|\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+1-s)}\frac{\sin\pi s}{\pi}\right| \le \sum_{n\ge 0}\frac{e^{\pi|s|}}{n!} = e\cdot e^{\pi|s|}.$$

(5) 一項目について, (複素数値関数の) 平均値の定理から $0 \le t \le 1$ が存在して

$$\frac{\sin\pi s}{k+1-s} = -\frac{\sin\pi s - \sin\pi(k+1)}{(s-(k+1))} = -\frac{\pi\cos\pi t(s-(k+1))}{1}.$$

よって

$$\left|(-1)^{k-1}\frac{\sin\pi s}{\pi k!\,(k+1-s)}\right| \le \frac{1}{k!} \;\le\; 1.$$

二項目については (4) と同様の評価ができて, 更に今の場合 $e^{\pi|s|} \le e^{\pi(k+2)}$ となるので, やはり有界である.

(6) $\mathrm{Re}(s) < 1/2$ なので, $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ なら $|n+1-s| < 1$. よって

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+1-s)}\right| \le \frac{1}{|1-s|}+\frac{1}{|2-s|}+\sum_{n\ge 2}\frac{1}{n!} \;\le\; 2+\frac{3}{2}+(e-1-1) = e+\frac{3}{2}.$$

10.3 その他の問題

問題 10.5. (1) 倍角公式から

$$I := \int_0^\pi \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \;=\; \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\cos\varphi}.$$

そこで

$$J(p) := \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+p\cos\varphi}$$

を考える. 求めたい I は $p = (a^2-b^2)/(a^2+b^2)$ の場合で, その時は $0 < p < 1$ となることに注意する. 積分 $J(p)$ は, $z = e^{i\varphi}$ と変数変換すれば

$$J(p) \;=\; \int_{|z|=1}\frac{dz/iz}{1+p(z+z^{-1})/2} \;=\; \int_{|z|=1}\frac{2dz}{ip(z^2+2p^{-1}z+1)}.$$

$\alpha_\pm := (-1 \pm \sqrt{(1-p^2)})/p$ とすると, 単位円内の極は α_+ のみで,

$$J(p) \;=\; 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\alpha} \frac{2}{ip(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)} \;=\; \frac{4\pi i}{ip(\alpha_+ - \alpha_-)} \;=\; \frac{2\pi}{\sqrt{1-p^2}}.$$

従って

$$I \;=\; \frac{1}{a^2+b^2} J\Big(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\Big) \;=\; \frac{1}{a^2+b^2} \frac{2\pi}{1-(a^2-b^2)^2/(a^2+b^2)^2} \;=\; \frac{\pi}{ab}.$$

(2) $y = \sqrt{x}$ と変数変換すると

$$I \;:=\; \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2} dx \;=\; \int_0^\infty \frac{2y^2}{y^4+a^2} dy \;=\; \int_{-\infty}^\infty \frac{y^2}{y^4+a^2} dy.$$

問題 8.3 (1) と同様に, 原点中心で半径 R の円周の上半分と $[-R, R]$ からなる積分路での $f(z) := z^2/(z^4+a^2)$ の積分を考えて, $R \to \infty$ で I が求まる. 積分路内の極は $\alpha_1 = a^{1/2}e^{i\pi/4}$ と $\alpha_2 = a^{1/2}e^{i3\pi/4}$ なので,

$$I \;=\; 2\pi i \Big(\operatorname*{Res}_{z=\alpha_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\alpha_2} f(z)\Big) \;=\; 2\pi i \Big(\frac{1}{4\alpha_1} + \frac{1}{4\alpha_2}\Big) \;=\; \frac{\pi}{\sqrt{2a}}.$$

(3) $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$ より

$$I := \int_C \frac{1-e^{2iz}}{2z^2} dz$$

を, 問題 4.2 と同じ積分路 C, つまり半径 R と r の二つの半円と実軸からなる積分路で考える. $R \to \infty$ と $r \to 0$ で求めたい積分が手に入る. 計算は問題 4.2 と全く同じで, 結果は $\mathrm{Re}(I) = \mathrm{Re}(\pi/2) = \pi/2$.

問題 10.6. 求める積分を $I := \int_{-\infty}^\infty f(z)\, dz$ と書く. 積分路を C と書くと

$$\int_C f(z)\, dz \;=\; \int_{-R}^R f(z)\, dz + \int_R^{R+2i} f(z)\, dz + \int_{R+2i}^{-R+2i} f(z)\, dz + \int_{-R+2i}^{-R} f(z)\, dz.$$

$f(z) := e^{-2\pi i z\xi}/\cosh(\pi z)$ の C の内部の極は $e^{\pi z} - e^{-\pi z} = 0$ の解, つまり $\alpha := i/2$ と $\beta := 3i/2$. よって

$$\int_C f(z)\, dz \;=\; 2\pi i \Big(\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\beta} f(z)\Big) \;=\; 2\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i\alpha\xi}}{\pi \sinh(\pi\alpha)} + \frac{e^{-2\pi i\beta\xi}}{\pi\sinh(\pi\beta)}\right) \;=\; 2\pi i \left(\frac{e^{\pi\xi}}{\pi i} - \frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i}\right).$$

一方で $R \to \infty$ で $\int_R^{R+2i}$ および $\int_{-R+2i}^{-R}$ の部分は 0 に収束することが示せる. また $\int_{R+2i}^{-R+2i} f(z)\, dz = -e^{4\pi\xi} \int_{-R}^R f(z)\, dz$. 以上より

$$I - e^{4\pi\xi} I \;=\; -2e^{2\pi\xi}(e^{\pi\xi} - e^{-\pi\xi}).$$

これから $I = 1/\cosh(\pi\xi)$ を得る.

以上です.