現代数学基礎 CⅢ　12 月 12 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html

10　ガンマ関数

今回の内容は [SS, Chapter 6 §1] に基づいてガンマ関数を扱う.

10.1　積分表示と解析接続

定義. $s \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し**ガンマ関数**を次の広義積分で定義する.

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt. \tag{10.1}$$

広義積分が収束することを確認しておこう: 条件 $s > 0$ より関数 t^{s-1} は $t = 0$ の近くで (Riemann 積分の意味で) 可積分である. また $t \to \infty$ で e^{-t} が冪関数 t^{s-1} より速く 0 に収束するので, 大きい t に対しても $e^{-t}t^{s-1}$ は可積分である.

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対しては, 部分積分を繰り返して値が計算できるのであった.

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

後の補題 10.1.2 も参照せよ.

命題 10.1.1. ガンマ関数は複素数平面の右半平面 $\mathbb{H}_{\mathrm{r}} := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ の正則関数に解析接続できる. そして解析接続したものは (10.1) と同じ式で与えられる.

証明. 任意の $s \in \mathbb{H}_{\mathrm{r}}$ に対して積分 (10.1) が収束し s に関して正則であることを示せばよい.

まず $s \in \mathbb{H}_{\mathrm{r}}$ に対して積分が収束することを確認する. $\sigma := \mathrm{Re}(s)$ と書くと $\left|e^{-t}t^{s-1}\right| = e^{-t}t^{\sigma-1}$. よって $|\Gamma(s)| \le \Gamma(\sigma)$ となり, $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ だから $\Gamma(\sigma)$ は有限値. 従って $\Gamma(s)$ も収束する.

次に $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}$ 上正則であることを示す. $0 < m < M < \infty$ となる任意の実数 m, M から定まる帯状領域 $S_{m,M} := \{s \in \mathbb{C} \mid m < \mathrm{Re}(s) < M\}$ の上で正則であることを示せば十分. 広義積分の定義から

$$\Gamma(s) = \lim_{\varepsilon \to +0} F_\varepsilon(s), \quad F_\varepsilon(s) := \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-t}t^{s-1}\, dt$$

となるので, 定理 6.5.4 (積分で定義される正則関数) より $F_\varepsilon(s)$ は $S_{m,M}$ 上正則である. ここで定理 6.5.3 (コンパクト集合上の正則関数列の収束先は正則関数) を思い出すと, $\Gamma(s)$ が正則であることを示すには, $F_\varepsilon(s)$ が $S_{m,M}$ において $\Gamma(s)$ に一様収束することを示せば十分.

再び記号 $\sigma := \mathrm{Re}(s)$ を用いると

$$|\Gamma(s) - F_\varepsilon(s)| \le \int_0^\varepsilon e^{-t}t^{\sigma-1}\, dt + \int_{1/\varepsilon}^\infty e^{-t}t^{\sigma-1}\, dt.$$

右辺の前半の積分について. $\varepsilon < 1$ で考えればよいが, $m < \sigma$ より

$$\int_0^\varepsilon e^{-t}t^{\sigma-1}\, dt \le \int_0^\varepsilon t^{\sigma-1}\, dt \le \int_0^\varepsilon t^{m-1}\, dt = \frac{\varepsilon^m}{m}.$$

[*1] 2019/12/12, ver. 0.3.

これは $\varepsilon \to 0$ で 0 に収束する．また後半の積分は, やはり $1/\varepsilon > 1$ で考えればよいが, $\sigma < M$ より

$$\int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1}\,dt \;\le\; \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{M-1}\,dt.$$

ここで, ある正の実数 C が存在して, $t > 1$ なら $e^{t/2}/t^{M-1} \ge C$ となる (この部分は演習問題とする)．従って

$$\int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1}\,dt \;\le\; \int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t} t^{M-1}\,dt \;\le\; C^{-1}\int_{1/\varepsilon}^{\infty} e^{-t/2}\,dt \;=\; \frac{2}{Ce^{1/2\varepsilon}}.$$

これは $\varepsilon \to 0$ で 0 に収束する．□

ガンマ関数は右半平面 $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}$ 上の正則関数から更に $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続できる．それを述べるために次の補題を用意する．

補題 10.1.2. $s \in \mathbb{H}_{\mathrm{r}}$ に対して

$$\Gamma(s+1) \;=\; s\Gamma(s).$$

特に $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\Gamma(n) = (n-1)!\Gamma(0) = (n-1)!$.

証明は演習問題とする．

定理 10.1.3. $\Gamma(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続される．極は $s = 0, -1, -2, \ldots$ にあって全て 1 位であり, $s = -n$ での留数は $(-1)^n n!$ である．

証明. 任意の正整数 m に対して領域 $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}(m) := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > -m\}$ に解析接続できれば十分．まず $m = 1$ の場合,

$$F_1(s) \;:=\; \frac{\Gamma(s+1)}{s}$$

とすれば $F_1(s)$ は $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}(1)$ で有理型関数で, $s = 0$ にのみ 1 位の極を持ち, 留数は $\mathrm{Res}_{s=0} F_1(s) = \Gamma(1) = 1$ となる．$m > 1$ の場合は

$$F_m(s) \;:=\; \frac{F_{m-1}(s+1)}{s} \;=\; \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)\cdots s}$$

と定義すれば, m に関する帰納法で $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}(m)$ で有理型関数で, $s = 0, -1, \ldots, -(m-1)$ にのみ 1 位の極を持つことが分かる．留数は $\Gamma(n) = (n-1)!$ から

$$\operatorname*{Res}_{s=-n} F_m(s) \;=\; \frac{\Gamma(-n+m)}{(m-1-n)!\cdot(-1)(-2)\cdots(-n)} \;=\; \frac{(-1)^n}{n!}.$$

補題 10.1.2 より $s \in \mathbb{H}_{\mathrm{r}}$ なら $F_m(s) = \Gamma(s)$ が分かる．すると一致の原理より $1 \le k \le m$ なら $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}(k)$ 上で $F_m(s) = F_k(s)$ となる．こうして $\Gamma(s)$ の $\mathbb{H}_{\mathrm{r}}(m)$ 上への解析接続 $F_m(s)$ が得られた．□

これ以降は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続したものを単にガンマ関数と呼んで $\Gamma(s)$ と書くことにする．この後の副節でガンマ関数の性質のうち顕著なものを二つほど紹介する．

10.2　関数等式

まず $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ に関する対称性を扱おう．

定理 10.2.1. 任意の $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に対して

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) \;=\; \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

証明. 両辺とも $s \in \mathbb{Z}$ に 1 位の極を持つ有理型関数なので, 領域 $(0,1) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ で等式を証明すれば, 解析接続の一意性より有理型関数として一致することが分かる.

$\Gamma(s)$ は $s \in (0,1)$ に対しては積分で定義されていたので, まず右辺を積分で表すことを考える.

補題. $s \in (0,1)$ に対して

$$\frac{\pi}{\sin \pi s} = \int_0^\infty \frac{v^{s-1}}{1+v}\,dv.$$

補題の証明. 変数変換 $v = e^x$ により

$$\int_0^\infty \frac{v^{s-1}}{1+v}\,dv = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{sx}}{1+e^x}\,dv.$$

右辺が $\pi/\sin \pi s$ に等しいことは §8 の演習問題 8.6 で示した. □

定理の証明に戻ろう. $s \in (0,1)$ に対して

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}\,du = t\int_0^\infty e^{-vt}(vt)^{s-1}\,dv.$$

ここで $t \in \mathbb{R}_{>0}$ は定数であり, $u = vt$ と変数変換した. すると

$$\begin{aligned}\Gamma(1-s)\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{-s}\Gamma(s)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{-s}\left(t\int_0^\infty e^{-vt}(vt)^{s-1}\,dv\right)dt \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t(1+v)}v^{s-1}\,dvdt \overset{(*)}{=} \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t(1+v)}v^{s-1}\,dtdv = \int_0^\infty \frac{v^{s-1}}{1+v}\,dv = \frac{\pi}{\sin \pi s}.\end{aligned}$$

最後の等式で上の補題を用いた. $(*)$ で積分の順序を交換したが, これは広義積分 $\int_0^\infty e^{-t(1+v)}v^{s-1}\,dt = v^{s-1}/(1+v)$ が $(0,\infty)$ 上で広義一様収束しているからである.

□

この定理で $s = 1/2$ とすれば $\Gamma(1/2)^2 = \pi$. $s \in (0,1)$ で被積分関数が正なので積分 $\Gamma(s)$ も正であるから

系.

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

10.3　無限積表示

定義. Euler の定数 $\gamma \in \mathbb{R}$ を次で定義する.

$$\gamma := \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N\right).$$

極限 γ が収束することは演習問題とする (微積分の簡単な問題). 実際の値は $\gamma = 0.57721566...$ である.

定理 10.3.1 ([SS, Chapter 6, Theorem 1.7])**.** 任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{\gamma s}s\prod_{n=1}^\infty\Big(1+\frac{s}{n}\Big)e^{-s/n}$$

この定理の完全な証明は与えずに, 大まかな説明だけする. まず関数 $1/\Gamma(s)$ に注目すると, 定理 10.2.1 より $1/\Gamma(s) = \pi^{-1}\Gamma(1-s)\sin \pi s$ で, これから $1/\Gamma(s)$ が整関数, つまり $\mathbb{C}$ 全体で正則であることが分かる. 更に

事実 10.3.2 ([SS, Chapter 6, Theorem 1.6])**.** $1/\Gamma(s)$ は $s = 0, -1, -2, \dots$ に 1 位の零点を持つ整関数である. 更に正の実定数 c_1 と c_2 が存在して, 次の評価が成立する.

$$\left|\frac{1}{\Gamma(s)}\right| \leq c_1 e^{c_2(|s|+1)\log(|s|+1)}.$$

ここで **Hadamard**[*2]**の因数分解定理**を紹介したい. 整関数 f に対しその**増大度** ρ_0 を

$$\rho_0 := \inf\{\rho \in \mathbb{R}_{>0} \mid \text{定数 } A, B \text{ が存在して, 任意の } z \in \mathbb{C} \text{ に対して } |f(z)| \leq Ae^{B|z|^\rho}\}$$

で定義する. また非負整数 k を $k := \lfloor \rho_0 \rfloor$ で定義し, (Weierstrass の) 既約因子 E_k を次で定義する.

$$E_k(z) := (1-z)e^{z+z^2/2+\cdots+z^k/k}.$$

最後に, f の 0 以外の零点を $a_1, a_2, \dots$ とし, m を f の $z = 0$ における零点の位数とする.

事実 10.3.3 ([SS, Chapter 5, Theorem 5.1], Hadamard の因数分解定理)**.** 以上の記号の下, ある k 次以下の多項式 P が存在して

$$f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n).$$

この事実は整関数 $1/\Gamma(s)$ に $k = 1$ 及び $a_n = -n$ で適用できて,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{As+B} s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n}$$

と書ける. あとは定数 A と B を決定すれば良い.

$s \to 0$ で $s\Gamma(s) \to 1$ なので $B = 0$ とできる. $s = 1$ で $\Gamma(1) = 1$ なので,

$$e^{-A} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{-1/n} = \lim_{N\to\infty} e^{\sum_{n=1}^{N}(\log(1+1/n)-1/n)} = \lim_{N\to\infty} e^{\log N + \log(1+1/N) - \sum_{n=1}^{N} 1/n} = e^{-\gamma}.$$

よって $m \in \mathbb{Z}$ を使って $A = \gamma + 2\pi i m$ と書けるが, $s \in \mathbb{R}_{>0}$ の時 $\Gamma(s) \in \mathbb{R}$ だから, $m = 0$ と分かる.

参考文献

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis II, Princeton University Press (2003);
日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 II 複素解析**, 日本評論社 (2009).

以上です.

[*2] カタカナだとアダマール.