

現代数学基礎 CIII 12月05日分演習問題*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019WC3.html>

10 関数の表示

10.1 有理型関数の部分分数分解

以下の問題 10.1 と問題 10.2 で Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

の偶数 $s = 2k$ での値を求める.問題 10.1. Bernoulli 数 B_n とその母関数 (演習問題 6.3)

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n!)} z^{2n}, \quad B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \quad \dots$$

から次の等式を導け.

$$z \cot z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n!)} z^{2n}.$$

問題 10.2. $\cot z$ の部分分数展開 $\cot z = z^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2z/(z^2 - n^2\pi^2)$ (講義ノートの命題 9.1.2) と Weierstrass の二重級数定理 (演習問題 6.7) から次の等式を導け.

$$z \cot z = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} z^{2k}.$$

これと前問 10.1 から次の等式が得られる.

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1} B_k}{(2k)!} \pi^{2k}.$$

特に $k = 1, 2, 3, 4$ として

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

問題 10.3. 次の部分分数展開を示せ.

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

問題 10.4. 次の部分分数展開を示せ.

$$\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{(2n-1)^2(\pi/2)^2 - z^2}.$$

*1 2019/07/31 版, ver. 0.1.

10.2 整関数の無限積表示

問題 10.5. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し次の等式が成立することを示せ.

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

問題 10.6. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し次の等式が成立することを示せ.

$$e^z - 1 = e^{z/2} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right).$$

10.3 Weierstrass の因数分解定理

問題 10.7. 講義ノートの補題 9.3.1 を証明せよ: $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$E_k(z) := \begin{cases} 1 - z & (k = 0) \\ (1 - z)e^{z+z^2/2+\dots+z^k/k} & (k \geq 1) \end{cases}$$

と定義すると, $|z| \leq 1/2$ ならば $|1 - E_k(z)| \leq 2e|z|^{k+1}$.

問題 10.8. 講義ノートの補題 9.3.3 を証明せよ: f が単連結領域 Ω 上の正則関数であって零点を持たないのであれば, Ω 上の正則関数 g であって $f(z) = \exp(g(z))$ となるものが存在する.

10.4 その他の問題

問題 10.9. $n \in \mathbb{N}$ とする. 原点中心で上半平面内にある半円周と実軸の一部からなる積分路上の複素積分を考えることで, 次の実積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

参考文献

[杉浦] 杉浦光夫, 解析入門 II, 東京大学出版会 (1985).

[SS] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton lectures in Analysis II, Princeton University Press (2003);

日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, プリンストン解析学講義 II 複素解析, 日本評論社 (2009).

以上です.